Сборник задач для подготовки к ЕГЭ

Задача 14 (С2). Стереометрия

Составитель С.А. Ермоловский

Построение сечений

1. *(ЕГЭ, 2012)* Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью C_1DE, если рёбра куба равны 2.

$\frac{9}{2}$

2. *(Статград, 2015)* На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.
   а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?
   б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

а) 3 : 11; б) $arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{10}}{3}$

3. *(Статград, 2015)* На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.
   а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
   б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

97,5

4. *(Статград, 2013)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 4 : 5, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

$\sqrt{1281}$

5. *(Статград, 2015)* В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.
   а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.
   б) Найдите периметр этого сечения.

19

6. *(ЕГЭ, 2013)* В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 1$. Точка F принадлежит ребру C_1D_1 и делит его в отношении 2 : 1, считая от вершины C_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и F.

$12\sqrt{2}$

7. *(ЕГЭ, 2016)* В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На ребрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что MNKL – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK

55

8. *(Статград, 2012)* В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 8, а боковые рёбра равны $\sqrt{13}$. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, C и середину ребра A_1B_1. Найдите его площадь.

30

9. *(ЕГЭ, 2014)* В правильной треугольной пирамиде MABC стороны основания ABC равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что CD = BE = LM = 2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

$2\sqrt{30}$

10. *(ЕГЭ, 2014)* В треугольной пирамиде MABC основанием является правильный треугольник ABC, ребро MA перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MB равно 5. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что AD = 2 и BE = ML = 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

$2\sqrt{3}$

11. *(Статград, 2013)* Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды SABCD равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

36

12. *(ЕГЭ, 2013)* В правильной треугольной пирамиде MABC с вершиной M высота равна 3, а боковые рёбра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA.

$\frac{27}{2}$

13. *(Статград, 2013)* В правильной треугольной пирамиде SABC с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36°. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B.

$16\sqrt{3}$

14. *(ЕГЭ, 2013)* В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

$5\sqrt{2}$

15. *(ФЦТ, 2013)* В правильной треугольной пирамиде SABC с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 7, а сторона основания равна 8.

$2\sqrt{29}$

16. *(Статград, 2012)* В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с основанием ABCD проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

$8\sqrt{5}$

17. *(ЕГЭ, 2014)* Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.

$9\sqrt{14}$

18. *(ЕГЭ, 2013)* Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.

5

19. *(ЕГЭ, 2013)* Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

12

Объемы тел

20. *(Статград, 2013)* Правильные треугольники ABC и BCM лежат в перпендикулярных плоскостях, BC = 8. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что BT : TM = 1 : 3. Вычислите объём пирамиды MPTA.

24

21. *(Статград, 2013)* В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1. Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

3

22. *(ЕГЭ, 2015)* В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB = 3. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

   а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

   б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

$$\frac{1075}{9}$$

23. *(ЕГЭ, 2013)* В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

$$12\left(7-4\sqrt{3}\right)\pi$$

Угол между прямой и плоскостью

24. *(ЕГЭ, 2012)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB = 2, AD = AA_1 = 1. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$$

25. *(Статград, 2010)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AA_1 = 3, AD = 8, AB = 6, найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины рёбер AB и B_1C_1.

$$arc\,\mathrm{tg}\frac{3}{5}$$

26. *(Статград, 2011)* Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

$$arc\,\text{tg}\frac{3}{5}$$

27. *(Статград, 2010)* В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M — середина ребра B_1C_1, а точка T — середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

$$2arc\,\text{tg}\frac{3}{8}$$

28. *(Статград, 2011)* Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = 5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.

45°

29. *(ЕГЭ, 2011)* В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

$$\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$$

30. *(ЕГЭ, 2010)* В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 7, а высота равна 1. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1.

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{151}}$$

31. *(ЕГЭ, 2014)* В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

$$arc\,\text{tg}\,2$$

32. *(ЕГЭ, 2010)* В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 6\sqrt{3}$, $SC = 10$. Точка N — середина ребра BC. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AT, где T — середина отрезка SN.

$$arc\,\text{tg}\frac{8}{15}$$

33. *(ЕГЭ, 2010)* В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 8\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC.

$$arc\,\text{tg}\frac{15}{16}$$

34. *(Статград, 2014)* Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет 5/7 от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

$$arc\,\text{tg}\frac{5}{4\sqrt{6}}$$

35. *(ЕГЭ, 2011)* В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD, все рёбра которой равны 1, точка E — середина ребра SB. Найдите угол между прямой CE и плоскостью SBD.

$arc\,\mathrm{tg}\sqrt{2}$

36. *(Репетиционный ЕГЭ, 2011)* Длины всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды P ABCD с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP, если точка M — середина бокового ребра пирамиды AP.

$arc\,\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{5}}$

Угол между плоскостями

37. *(ЕГЭ, 2012)* В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

$arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{13}}{2}$

38. *(Репетиционный ЕГЭ, 2012)* В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

$45°$

39. *(ЕГЭ, 2014)* В правильной треугольной пирамиде MABC с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 5 : 1$. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MK. Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

$2\arcsin\frac{\sqrt{682}}{44}$

40. *(ЕГЭ, 2014)* Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

$\arccos\frac{7}{32}$

41. *(Статград, 2012)* В правильной треугольной пирамиде SABC точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 6$, $AB = 4$.

$arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{23}}{5}$

42. *(Статград, 2013)* В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 10$, $SC = 8$.

$arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{7}}{10}$

43. *(Репетиционный ЕГЭ, 2010)* В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с основанием ABCD сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2 : 1$.

$arc\,\mathrm{tg}\frac{8}{3}$

44. *(ЕГЭ, 2014)* Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 углом $\angle A = 120^{\circ}$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

$$\arcsin\frac{3}{5}$$

Угол между прямыми

45. *(ЕГЭ, 201)* На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

$$\arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

46. *(ЕГЭ, 2012)* Точка E — середина ребра DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми CE и AC_1.

$$\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$$

47. *(ФЦТ, 2012)* В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$ и точка E — середина ребра AB. Найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1E.

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}$$

48. *(Статград, 2014)* Дана правильная четырёхугольная пирамида MABCD, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB. Найдите высоту данной пирамиды.

5

49. *(Юг, пробный ЕГЭ, 2012)* В пирамиде DABC известны длины рёбер: $AB = AC = DB = = DC = 13$ см, $DA = 6$ см, $BC = 24$ см. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

4 см

Расстояния

50. *(ЕГЭ, 2012)* В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

$$\frac{3}{\sqrt{13}}$$

51. *(ЕГЭ, 2016)* В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро $3\sqrt{6}$. На ребрах AB и B_1C_1 отмечены точки К и L соответственно, причем $AK = 2$, $B_1L = 4$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки К и L.

   а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

   б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ/

$$\sqrt{2}$$

52. *(ЕГЭ, 2016)* В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 8, а боковое ребро $4\sqrt{2}$. На ребрах BC и D_1C_1 отмечены точки К и L соответственно, причем $BK = 2$, $C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки К и L.

   а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

$$\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

53. *(ЕГЭ, 2016)* В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q – середина ребра A_1B_1, а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины C_1. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой CC_1.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ.

$$\frac{32\sqrt{57}}{57}$$

54. *(ЕГЭ, 2016)* На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M

а) Докажите, что точка M является серединой CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

$$\frac{12\sqrt{26}}{13}$$

55. *(МИОО, 2011)* В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1. M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

56. *(Статград, 2014)* В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

$$\frac{3\sqrt{39}}{4}$$

57. *(Статград, 2012)* Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM, где M — середина ребра SC.

1

58. *(Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014)* Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60°. Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC. Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

$$\frac{\sqrt{15}}{5}$$

59. *(ЕГЭ, 2013)* Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

$$\frac{15}{4}$$

60. *(Репетиционный ЕГЭ, 2012)* Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб ABCD, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60°. Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

10

61. *(Статград, 2013)* Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

$\frac{\sqrt{6}}{2}$

62. *(ЕГЭ, 2016)* В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N – середины ребер CD и AB соответственно, а NT – высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой отрезка SM.

б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC.

$\frac{\sqrt{15}}{5}$

Ответы

1 а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$

2 а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3},\ -4\pi$

3 а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$

4 а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3},\frac{11\pi}{3},\frac{13\pi}{3}$

5 а) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2}$

6 а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$

7 а) $\pi+2\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3}$

8 а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3},\ -\frac{8\pi}{3}$

9 а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$

10 а) $-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3},\ \pi$

11 а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{4}$

12 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}$

13 а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3},\ 2\pi,\ 3\pi$

14 а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}$

15 а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi,\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3}$

16 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}$

17 а) $\pi n,\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi,\ -3\pi,\ -\frac{17\pi}{6}$

18 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6}$

19 а) $\pi n,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-5\pi,\ -\frac{19\pi}{4},\ -4\pi$

20 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{2},\ \frac{11\pi}{2},\ \frac{19\pi}{4}$

21 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{4},\ -\frac{7\pi}{4}$

22 а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3},\ -2\pi,\ -\pi$

23 а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{2\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$

24 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{4},-\frac{5\pi}{4}$

25 а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3}$

26 а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2},\ \arccos\left(-\frac{1}{4}\right),\ 2\pi-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$

27 а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$

28 а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{6}$

29 а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$

30 а) $2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) -2π

31 а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$

32 а) $\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3},\ 2\pi,\ 3\pi$

33 а) $\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6},\ 3\pi$

34 а) $\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi-\arccos\frac{4}{5}$

35 $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

36 $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

37 а) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{4}$

38 а) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{17\pi}{6}$

39 а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$

40 а) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{4},\ arc\,\operatorname{tg}\frac{1}{3}-\pi$

41 а) $\log_{\frac{2}{3}}3,\ \log_{\frac{2}{3}}4$; б) $\log_{\frac{2}{3}}3$

42 а) $2,\ \log_{35}5$; б) $\log_{35}5$

43 а) $-1,\ \log_3\frac{5}{3}$; б) $\log_3\frac{5}{3}$

44 а) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

45 а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6},-\frac{17\pi}{6},-\frac{13\pi}{6}$

46 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2},-\frac{11\pi}{6},-\frac{3\pi}{2},-\frac{7\pi}{6}$

47 а) $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) -3π

48 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{6}$

49 а) $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3},\frac{11\pi}{3}$

50 а) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4},\frac{25\pi}{4}$

51 а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$

52 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}$

53 а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}$

54 а) $\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi,\ 3\pi,\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}$