

Сборник задач для подготовки к ЕГЭ

Задача 15 (С3). Неравенства

Составитель С.А. Ермоловский

Рациональные неравенства

1. (Статград, 2013) $\frac{12x^2 - 31x + 14}{4x^2 + 3x - 1} \leq 0$
2. (Статград, 2014) $\frac{x^5 - x^2}{x^2} \geq \frac{x^3 - 1}{4x^2}$
3. (ЕГЭ, 2013) $\frac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \frac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \leq 4x + 1$
 $(-\infty; 3] \cup (4; 5)$
4. (ЕГЭ, 2013) $\frac{1}{5x - 12} + \frac{2x^2 - 6x + 1}{x - 3} \geq 2x$
5. (Статград, 2013) $x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x - 5} \leq 2$
 $(-\infty; -2] \cup [1; 5)$
6. (ЕГЭ, 2013) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \frac{3x + 1}{x - 1} \leq \frac{4x + 1}{x}$
 $(-\infty; -3] \cup (-2; 0) \cup (0; 1)$
7. (ЕГЭ, 2013) $x - \frac{x - 3}{x + 6} - \frac{x^2 + 27x + 90}{x^2 + 8x + 12} \leq -1$
 $(-\infty; 6) \cup (-6; -4] \cup (-2; 3]$
8. (ЕГЭ, 2013) $x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2 + x - 7}{x - 7} \leq 1$
 $(-\infty; -3] \cup [2; 7)$
9. (Статград, 2013) $\frac{2 - (x - 5)^{-1}}{2(x - 5)^{-1} - 1} \leq -0,5$
 $(-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$
10. (ЕГЭ, 2014) $\frac{2x^2 + x - 28}{(x - 3)^3 + (x - 5)^3 - 1} \leq 0$
 $(-\infty; -4] \cup \left[\frac{7}{2}; 6\right)$
11. (Статград, 2013) $x^2 + (1 - \sqrt{10})x - \sqrt{10} \leq 0$
 $[-1; \sqrt{10}]$

12. (Статград, 2013) $1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}$

$$[-1 - 2\sqrt{6}; 0) \cup (0; 1 + 2\sqrt{6}]$$

13. (Статград, 2014) $-4|x^2 - 1| - 3 \geq \frac{1}{x^2 - 1}$

$$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

14. (Статград, 2013) $3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8$

$$[-1; 3]$$

15. (Статград, 2014) $\left|2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8}\right| \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}$

$$[-1; 3]$$

Иррациональные неравенства

16. (Статград, 2015) $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + x}}{x^2 + x - 1} \leq 0$

$$\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -1\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$$

Показательные неравенства

17. (Статград, 2013) $9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0$

$$(-\infty; 0] \cup [\log_3 4; +\infty)$$

18. (Статград, 2014) $4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 \leq 0$

$$[-2; 3]$$

19. (ЕГЭ, 2014) $16^{x-\frac{5}{4}} - 3 \cdot 4^{x-\frac{3}{2}} + 1 \geq 0$

$$(-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

20. (ЕГЭ, 2014) $9^{x+\frac{1}{2}} - 28 \cdot 3^{x-1} + 1 \leq 0$

$$[-2; 1]$$

21. (ЕГЭ, 2013) $5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \leq 0$

$$[-3; \log_2 0,4]$$

22. (ЕГЭ, 2014) $3^x + 8 \cdot 3^{-x} \geq 9$

$$(-\infty; 0] \cup [\log_3 8; +\infty)$$

23. (ЕГЭ, 2014) $19 \cdot 4^x + 4^{-x} \leq 20$

$$[-\log_4 19; 0]$$

24. (ЕГЭ, 2014) $3^x + \frac{54}{3^x} \geq 29$

$$(-\infty; \log_3 2] \cup [3; +\infty)$$

25. (ЕГЭ, 2013) $2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \leq 25$

$[3; \log_2 17]$

26. (Статград, 2012) $3^{4x-1} + 3^{4x+1} \geq 80$

$\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \log_3 2; +\infty \right)$

27. (ЕГЭ, 2012) $\frac{160 - 4^x}{32 - 2^x} \geq 5$

$(-\infty; \log_2 5] \cup [5; +\infty)$

28. (ЕГЭ, 2016) $\frac{4^x - 2^{x+4} + 30}{2^x - 2} + \frac{4^x - 7 \cdot 2^x + 3}{2^x - 7} \leq 2^{x+1} - 14$

$(-\infty; 1) \cup [2; \log_2 7)$

29. (ЕГЭ, 2016) $\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leq 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}$

$(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup (\log_3 2; 1)$

30. (ЕГЭ, 2016) $125^x - 25^x + \frac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \leq 4$

$\{0\} \cup [\log_5 4; 1)$

31. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012) $10x - 14 \ln 17 + 3^x + 3^{x+1} > 4^x + 10x - 14 \ln 17$

32. (Статград, 2013) $25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \leq 0$

$\left(-\infty; \log_{\frac{5}{4}} 2 \right]$

33. (ЕГЭ, 2014) $25^{x^2-2x+10} - 0,2^{2x^2-4x-80} \leq 0$

$[-3; 5]$

Метод рационализации

34. (ЕГЭ, 2014) $\log_2 \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 2} \leq 1$

35. (ЕГЭ, 2014) $\log_3 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{16}{x^2} \right) \leq 1$

36. (ЕГЭ, 2014) $\log_{x+3} \left(\frac{x+1}{4} \right) \leq 0$

$(-1; 3]$

37. (ЕГЭ, 2013) $\log_{7-2x} (x+6) \leq 0$

$(-6; -5] \cup (3; 3,5)$

38. (Статград, 2013) $\log_{6x^2-x-1} (2x^2 - 5x + 3) \geq 0$

$\left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right) \cup [2; +\infty)$

39. (Статград, 2015) $\log_{x^2+x} (x^2 - 2x + 1) \leq 1$

$$\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -1\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

40. (ЕГЭ, 2012) $\log_{0,25x^2} \left(\frac{6-x}{4}\right) \leq 1$

$$(-\infty; -3] \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6)$$

41. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014) $\log_x (x^3 - 1) \leq \log_x (x^3 + 2x - 4)$

$$[1, 5; +\infty)$$

42. (ЕГЭ, 2016) $\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}} \left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right) \leq 0$

$$\left[-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (2; +\infty)$$

43. (ЕГЭ, 2014) $2 \log_{(x^2-4x+5)^2} (4x^2+1) \leq \log_{x^2-4x+5} (3x^2+4x+1)$

$$[0; 2) \cup (2; 4]$$

44. (ЕГЭ, 2016) $2 \log_{(x^2-6x+10)^2} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3)$

$$[0; 3) \cup (3; 7]$$

45. (Статград, 2013) $\log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left|\frac{x}{2}\right| \leq 0$

$$\left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 2]$$

Замена переменной в логарифмических неравенствах

46. (ЕГЭ, 2015) $\log_2^2 (4+3x-x^2) + 7 \log_{0,5} (4+3x-x^2) + 10 > 0$.

$$(-1; 0) \cup (3; 4)$$

47. (Статград, 2013) $\log_{x+1} (2x-5) + \log_{2x-5} (x+1) \leq 2$

$$\left(\frac{5}{2}; 3\right) \cup \{6\}$$

48. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012) $\log_6 (x+1) - 2 \log_{x+1} 6 + 1 > 0$

$$\left(-\frac{35}{36}; 0\right) \cup (5; +\infty)$$

Использование свойств логарифмов

49. (ЕГЭ, 2014) $\log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1}$

$$[-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [1; +\infty)$$

50. (Статград, 2015) $\frac{\log_{1-2x}((x+1)(1-4x+4x^2))}{\log_{x+1}(1-2x)} \leq -1$

$$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

51. (ЕГЭ, 2013) $\log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leq -2$

$$[\sqrt{6}; +\infty)$$

52. (ЕГЭ, 2012) $\log_{x+5} \left(\frac{3-x}{x}\right)^4 + \log_{x+5} \frac{x}{x-3} \leq 3$

$$(-5; -4) \cup [-3; -1] \cup (3; +\infty)$$

53. (ЕГЭ, 2012) $\log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1}\right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7}$

$$(-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; +\infty)$$

54. (Статград, 2014) $2 \log_2 \frac{x-1}{x+1,3} + \log_2 (x+1,3)^2 \geq 2$

$$(-\infty; -1,3) \cup [3; +\infty)$$

55. (Пробный ЕГЭ, 2012) $2 \log_3 \frac{x-2}{x-3,3} + \log_3 (x-3,3)^2 \geq 0$

$$(-\infty; 1] \cup (3,3; +\infty)$$

56. (Статград, 2011) $7 \log_9 (x^2 - x - 6) \leq 8 + \log_9 \frac{(x+2)^7}{x-3}$

$$[-6; -2] \cup (3; 12]$$

57. (ЕГЭ, 2012) $\log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 (27x) + 9 \geq 0$

$$\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [1; +\infty)$$

58. (ЕГЭ, 2013) $\log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10$

$$[-3; 4)$$

59. (Статград, 2014) $\log_2^2 (-\log_2 x) + \log_2 \log_2^2 x \leq 3$

$$\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$$

60. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012) $\log_x (\log_2 x + \log_4 x + 1) \geq \frac{1}{\log_2 x}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; 1\right) \cup (\sqrt[3]{4}; +\infty)$$

61. (Статград, 2011) $9^{\lg x} + x^{2 \lg 3} \geq 6$

$$[\sqrt{10}; +\infty)$$

62. (Статград, 2011) $\frac{\log_{7^{x+3}} 49}{\log_{7^{x+3}} (-49x)} \leq \frac{1}{\log_7 \log_{\frac{1}{7}} 7^x}$

$$[-49; -3) \cup (-3; -1) \cup \left(-\frac{1}{49}; 0\right)$$

63. (ЕГЭ, 2011) $\frac{2\log_{x+4}(x^2 - 2x)}{\log_{x+4} x^2} \geq 1$

$$(-4; -3) \cup (-3; -1) \cup [3; +\infty)$$

Комбинированные неравенства

64. (ЕГЭ, 2014) $x \cdot \log_{x+3}(7 - 2x) \geq 0$

$$(-3; -2) \cup [0; 3]$$

65. (ЕГЭ, 2016) $(5x - 13) \cdot \log_{2x-5}(x^2 - 6x + 10) \geq 0$

$$\left[\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right] \cup (3; +\infty)$$

66. (ЕГЭ, 2014) $\log_{4-x}(x+4) \cdot \log_{x+5}(6-x) \leq 0$

$$(-4; -3] \cup (3; 4)$$

67. (Статград, 2013) $\frac{3^{|x^2-2x-1|} - 9}{x} \geq 0$

$$[-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$$

68. (Статград, 2015) $\frac{81^x + 2 \cdot 25^{x \log_5 3} - 5}{(4x-1)^2} \geq 0$

$$\left[\log_9(\sqrt{6}-1); \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$$

69. (Статград, 2015) $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 \leq \log_{\frac{x}{2}} 5$

$$(2; 3]$$

70. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014) $\sqrt{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 3} \geq 2^x - 3$

$$\left(-\infty; \log_2 \frac{1}{3}\right] \cup [\log_3 3; +\infty)$$

71. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \leq 54$

$$\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; 3]$$

72. (Статград, 2011) $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \geq 2\sqrt[4]{5}$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}; 1\right] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$$

Системы для повторения

$$73. \text{ (Статград, 2013) } \begin{cases} \frac{2}{0,5x\sqrt{5}-1} + \frac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3} \geq 2, \\ \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2} \right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}} \right] \cup \left(\frac{6}{\sqrt{5}}; 3 \right)$$

$$74. \text{ (Статград, 2012) } \begin{cases} \frac{2}{5^{x+1}-1} + \frac{5^{x+1}-2}{5^{x+1}-3} \geq 2, \\ \left(\frac{2}{25x^2+40x+7} + \frac{25x^2+40x+7}{2} \right)^2 \geq 4. \end{cases}$$

$$(-1; \log_5 0,4] \cup (\log_5 0,6; -0,2) \cup (-0,2; 0]$$

$$75. \text{ (Статград, 2012) } \begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \leq 7, \\ \frac{2x^2 - 6x}{x-4} \leq x. \end{cases}$$

$$\{0\} \cup [2; \log_2 6]$$

$$76. \text{ (ЕГЭ, 2013) } \begin{cases} \log_{6-x} \frac{(x-6)^2}{x-2} \geq 2, \\ \frac{x^2 - x - 14}{x-4} + \frac{x^2 - 8x + 3}{x-8} \leq 2x + 3. \end{cases}$$

$$(5; 6)$$

$$77. \text{ (ЕГЭ, 2012) } \begin{cases} 2^x + 32 \cdot 2^{-x} \geq 33, \\ 2 \log_9 (4x^2 + 1) \geq \log_3 (3x^2 + 4x + 1). \end{cases}$$

$$(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0 \right] \cup [5; +\infty)$$

$$78. \text{ (ЕГЭ, 2012) } \begin{cases} 4 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 8 \leq 0, \\ \log_{x^2} (x-1)^2 \leq 1. \end{cases}$$

$$(-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2} \right) \cup (1; 3)$$

$$79. \text{ (ЕГЭ, 2013) } \begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leq 0, \\ \frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geq x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x} \end{cases}$$

$$\{3\} \cup (4; \log_2 21]$$

$$80. \text{ (Статград, 2013) } \begin{cases} |x+2| - x|x| \leq 0, \\ (x^2 - x - 6)\sqrt{8-x} \leq 0. \end{cases}$$

$$[2; 3] \cup \{8\}$$

$$81. \text{ (ФЦТ, 2013) } \begin{cases} \log_{3-x} (x^2 - 2x + 26) \leq 3 \log_{3-x} 3, \\ \frac{x^2 - 2x - 2}{x-3} \leq \frac{x}{2} + 1. \end{cases}$$

$$[1-\sqrt{2}; 1] \cup [1+\sqrt{2}; 3)$$

$$82. \text{ (ЕГЭ, 2012) } \begin{cases} \frac{25 \cdot 0,5^{x-1} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 4^x} \geq 0,5^{x+2}, \\ \log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0. \end{cases}$$

$$[-3; 0) \cup (0; 2) \cup [1 + 2\log_2 5; 6)$$

$$83. \begin{cases} 2^{2x+1} - 2^{x+2} - 2^x \leq 3, \\ \log_{x+\frac{2}{9}} 3 \leq \log_{\sqrt{x}} 3. \end{cases}$$

$$\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right) \cup (1; \log_2 3]$$

$$84. \text{ (Статград, 2011) } \begin{cases} \log_{3-x} (x+1) \cdot \log_{x+5} (4-x) \geq 0, \\ \left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right|^{x-1,2} + \left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right|^{1,2-x} \leq 2. \end{cases}$$

$$\{1, 2\}$$