

Зачет по теме «Предел и производная»

Теория

1. Определение числовой последовательности и способы ее задания. Примеры.
2. Свойства числовых последовательностей. Монотонность и ограниченность. Примеры.
3. Определение предела числовой последовательности. Примеры.
4. Свойства сходящихся последовательностей. Теорема Вейерштрасса. Примеры.
5. Вычисление пределов последовательностей. Неопределенности. Примеры.
6. Сумма бесконечной геометрической прогрессии. Примеры.
7. Предел функции на бесконечности.
8. Предел функции в точке. Замечательный предел. Неопределенности. Примеры.
9. Определение непрерывной в точке и на промежутке функции. Примеры.
10. Приращение аргумента и приращение функции. Другое определение непрерывной в точке функции.
11. Задачи, приводящие к определению производной.
12. Определение производной. Алгоритм нахождения производной функции по определению.

Уровень В

1. Составьте одну из возможных формул n -ого члена последовательности по первым пяти ее членам:

a. $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \dots$

b. $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \dots$

2. Найдите число положительных членов последовательности и укажите номер наибольшего члена

$$y_n = -n^2 + 9n - 14$$

3. Исследуйте последовательность $x_n = \frac{n}{n+2}$ на ограниченность и монотонность.

4. Вычислите:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} - \frac{5}{\sqrt{n}} + 2 \right)$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-n^2}{n^2}$

5. Вычислите $\frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \dots$

6. Вычислите

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(12 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{16}{x^7}$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$

7. Пользуясь определением, найдите производную функции $y = x^2 + 3x + 5$ в точке x .

8. Найдите производную функции

a. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x - \sqrt{x} + 5 \sin x$

b. $y = (x^2 + 3)(x^6 - 1)$

c. $y = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$

d. $y = \frac{x^2}{3-4x}$

e. $y = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6} - 4x \right)$

f. $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3} \right)^3$

Уровень С

1. Составьте одну из возможных формул n -ого члена последовательности по первым пяти ее членам:

$$\frac{2}{5}, \frac{8}{17}, \frac{26}{65}, \frac{80}{257}, \frac{242}{1025}, \dots$$

2. Найдите номер члена последовательности $y_n = \frac{3n+191}{3n+2}$, наиболее близкого к числу 5.
3. При каких значениях параметра p последовательность $y_n = -\frac{p-1}{n}$ будет возрастающей?

4. Вычислите:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)(n^2+1) + n^3}{n^2 + 2n}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)}{n^3 + \pi n^2 + \sqrt{111n}}$

5. Вычислите $49 - 14 + 4 - \frac{8}{7} + \dots$

6. Вычислите

a. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x^3}{1-x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$

7. Пользуясь определением, найдите производную функции $y = \sqrt{x} + 1$ в точке x

8. Найдите производную функции

a. $y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$

b. $y = \sqrt{x}(8x-10)$

c. $y = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{ctg} x$

d. $y = \frac{x^5 + x}{x^5 - 1}$

e. $y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

f. $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3} \right)^3$

g. $y = \frac{1}{\cos^2 2x}$

Звездные задачи

1. Решите уравнение $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots = 5$

2. Воспользовавшись определением, найдите производную функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$ в

точке $x_0 = 1$ или докажите, что она не существует

Теория

13. Определение числовой последовательности и способы ее задания. Примеры.
14. Свойства числовых последовательностей. Монотонность и ограниченность. Примеры.
15. Определение предела числовой последовательности. Примеры.
16. Свойства сходящихся последовательностей. Теорема Вейерштрасса. Примеры.
17. Вычисление пределов последовательностей. Неопределенности. Примеры.
18. Сумма бесконечной геометрической прогрессии. Примеры.
19. Предел функции на бесконечности.
20. Предел функции в точке. Замечательный предел. Неопределенности. Примеры.
21. Определение непрерывной в точке и на промежутке функции. Примеры.
22. Приращение аргумента и приращение функции. Другое определение непрерывной в точке функции.
23. Задачи, приводящие к определению производной.
24. Определение производной. Алгоритм нахождения производной функции по определению.