

# Теория

1. Показательная функция. Ее свойства и график.
2. Степень с иррациональным показателем.
3. Решение простейших показательных уравнений и неравенств.
4. Показательные уравнения. Методы решения
5. Показательные неравенства.
6. Понятие логарифма.
7. Логарифмическая функция. Ее свойства и график.
8. Свойства логарифмов.
9. Логарифмические уравнения. Методы решения.
10. Логарифмические неравенства.
11. Метод рационализации решения логарифмических неравенств.
12. Число  $e$ . Функция  $y = e^x$ . Ее свойства и график.
13. Натуральный логарифм. Функция  $y = \ln x$ . Ее свойства и график.
14. Дифференцирование показательной функции.
15. Дифференцирование логарифмической функции.
16. Степенно-показательная функция.

## Уровень В

1. Постойте и прочитайте график функции

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 0, \\ \sqrt{x} + 1, & x \geq 0. \end{cases} & \text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \log_{\sqrt{2}} x, & x > 0. \end{cases}
 \end{array}$$

2. Найдите область значений функции

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } y = 5 \cdot 17^x - 2, & \text{b. } y = 3^{1 - \log_3 x}
 \end{array}$$

3. Решите графически

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } 3^x = 4 - x & \text{b. } 5^{x-1} \leq \frac{1}{x} & \text{c. } \log_2(-x) \leq -\frac{2}{x}
 \end{array}$$

4. Решите уравнение

$$\text{a. } 7 \cdot 5^x = 5 \cdot 7^x$$

$$\text{b. } \frac{3^{x^2} - 3}{x - 1} = 0$$

$$\text{c. } 11^x - 12 \cdot 11^x + 1 = 0$$

$$\text{d. } 49^{x+0,5} - 8 \cdot 49^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$$

$$\text{e. } \frac{1}{5^x + 4} = \frac{1}{5^{x+1}}$$

$$\text{f. } 3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$$

$$\text{g. } 4^x + 5^x = 9^x$$

$$\text{h. } \left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3} \sin x}$$

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $8^{3x+1} = a + 3$  имеет корни?

6. Решите неравенство

$$\text{a. } 8^{\frac{2-x}{x}-2} > \frac{1}{64}$$

b.  $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{2x} + 3 < 0$

c.  $9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511$

7. Упростите:

a.  $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

b.  $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{\sqrt{2}}$

c.  $\log_{13} 0,25 + \frac{\log_3 4}{\log_3 13}$

8. Решите уравнения:

a.  $\lg(5-x) - \frac{1}{3} \lg(35-x^3) = 0$

b.  $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$

c.  $\log_{0,5}(4x-1) - \log_{0,5}(7x-3) = 1$

d.  $\frac{1}{5-4 \lg x} + \frac{4}{1+\lg x} = 3$

e.  $\begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 81, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$

9. Решите систему неравенств

a.  $\begin{cases} \log_{x-3}(x^2 - 12x + 36) \leq 0, \\ 9^{x-2} - 37 \cdot 3^{x-3} + 30 \leq 0. \end{cases}$

b.  $\begin{cases} \frac{2x^2 - 10x + 6}{x-5} \leq x, \\ 1 + \log_6(4-x) \leq \log_6(16-x^2). \end{cases}$

c.  $\begin{cases} 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0, \\ \log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \leq 0. \end{cases}$

10. Найдите производную функции

a.  $y = 5^x - 7 \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

b.  $y = x^2 \log_{\frac{1}{2}}(3x-1)$

11. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы  $y = x^4 - 4 \ln x$

## Уровень С

1. Постойте и прочитайте график функции

a.  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|}$

b.  $y = |1 - \log_2 |x||$

2. Найдите область значений функции

a.  $y = \frac{4^{3x} + 125}{4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 25}$

b.  $y = \log_3(x^2 - 4x + 13)$

3. Решите графически

a.  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{x} - \frac{2}{3}$

b.  $2^x - 1 \geq \sqrt{x}$

c.  $\lg(-x) + 1 \geq -x^2 + 1$

4. Решите уравнение

a.  $3^{8x-5} \cdot 7^{x+4} = 3^{2x+1} \cdot 7^{7x-2}$

b.  $\frac{11^{x^2-2}}{13^{\sqrt{x}}} = \frac{121}{13^{\sqrt{x}}}$   
 c.  $\frac{13^{x^2+3x+2} - 11^{x^2+3x+2}}{x+1} = 0$   
 d.  $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$   
 e.  $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$   
 f.  $12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0$   
 g.  $(16^{\sin x})^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3} \sin x}$

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $9^x + 2a \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$  не имеет корней?

6. Решите неравенство

a.  $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \leq 4$   
 b.  $3^{(2x-1)^2 + |2x-1|} \cdot 4^{-|2x-1|} \leq 1$   
 c.  $3^{x^2+2x} - 9^{x+2} - 3^{x^2} \cdot 2^x + 81 \cdot 2^x \geq 0$

7. Упростите

a.  $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$   
 b.  $\frac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \frac{a}{b}}$

8. Решите уравнения

a.  $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2 (x^2 - 25) = 0$   
 b.  $3 \cdot 4^{\log_x 2} - 46 \cdot 2^{\log_x 2-1} = 8$   
 c.  $\lg \sqrt{x+3} + \lg \sqrt{x-3} = 2 - 0,5 \lg 625$   
 d.  $\log_x \sqrt{2} - \log_x^2 \sqrt{2} = \log_3 27 - \log_x (2x)$   
 e.  $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$   
 f.  $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$

9. Решите систему

a.  $\begin{cases} \log_7^2 (x^2 + 4x - 20) \leq x - 3, \\ \log_7^2 (x^2 + 2x - 14) \leq 3 - x. \end{cases}$   
 b.  $\begin{cases} 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0, \\ \log_{|x|}^2 (x^2) + \log_2 (x^2) \leq 8. \end{cases}$   
 c.  $\begin{cases} 7^{x-1} + 7^x + 7^{x+1} > 171, \\ \log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right) \end{cases}$

10. Найдите производную функции

a.  $y = \ln^2 (3x - 4)$       b.  $y = 5^{\log_3 (tg 3x)} \cdot \sqrt{\ln(2x - 5)}$

11. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы  $y = \ln \frac{1}{x^3} + x^2 + x + 3$

# Звездные задачи

1. Решите уравнение

а.  $32 \cdot 8^{x-1} + 3 \cdot (4^x + 2^x) = 1$ .

б.  $2^{|x-2|} - |2^{1-x} - 1| = 2^{1-x} + 1$

с.  $3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 = 0$

2. При каком значении параметра  $m$  уравнение  $x^2 - (2^m - 1)x - 3(4^{m-1} - 2^{m-2}) = 0$  имеет единственный корень?

3. Вычислить  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$ .

4. Найдите  $\log_2 360$ , если известно, что  $\log_3 20 = a$ ,  $\log_3 15 = b$ .

5. Исследуйте функцию и постройте ее график  $y = \ln(3 + 2x - x^2)$ .

6. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}. \end{cases}$$

7. Найдите наибольшее целое  $a$ , такое, что между числами  $a$  и  $3 + 3^{a-2}$  есть решения неравенства  $\sqrt{\log_7(x^2 - 7x + 13)}(12^x \log_{12} x + 12 - 12 \log_{12} x - 12^x) \leq 0$ , а сами числа  $a$  и  $3 + 3^{a-2}$  решениями не являются.

