

# Зачет по алгебре «Степени и корни. Степенные функции»

## Теория

1. Понятие корня  $n$ -ой степени из действительного числа, общий случай. Определения, предпосылки к возникновению понятия.
2. Понятие корня  $n$ -ой степени из действительного числа, случай корня нечетной степени. Определения, предпосылки к возникновению понятия.
3. Функция  $y = \sqrt[n]{x}$ , ее свойства и график. Общий случай.
4. Функция  $y = \sqrt[n]{x}$ , ее свойства и график. Случай нечетного показателя.
5. Свойства корня  $n$ -ой степени. Сформулировать все свойства, доказать Теорему 1. Примеры.
6. Свойства корня  $n$ -ой степени. Сформулировать все свойства, доказать Теорему 2. Примеры.
7. Свойства корня  $n$ -ой степени. Сформулировать все свойства, доказать Теорему 3. Примеры.
8. Свойства корня  $n$ -ой степени. Сформулировать все свойства, доказать Теорему 4. Примеры.
9. Свойства корня  $n$ -ой степени. Сформулировать все свойства, доказать Теорему 5. Примеры.
10. Понятие степени с любым рациональным показателем. Определения. Предпосылки появления понятия. Свойства степени.
11. Степенные функции. Определение. Функция  $y = x^{\frac{m}{n}}$ , где  $\frac{m}{n} > 1$ . Ее свойства и график.
12. Степенные функции. Определение. Функция  $y = x^{\frac{m}{n}}$ , где  $0 < \frac{m}{n} < 1$ . Ее свойства и график.
13. Степенные функции. Определение. Функция  $y = x^{\frac{m}{n}}$ , где  $\frac{m}{n} < 0$ . Ее свойства и график.
14. Теорема о дифференцировании степенной функции (без доказательства). Примеры использования. Найти производную функции  $y = \sqrt[n]{x}$ .

## Уровень В

1. Верно ли равенство?

a.  $\sqrt[3]{-8} = -2$

b.  $\sqrt[4]{-16} = 2$

c.  $-\sqrt[3]{8} = -2$

d.  $-\sqrt[4]{-16} = 2$

2. Постройте график функции

a.  $y = \sqrt[4]{x+2} - 5$ ,

b.  $y = \sqrt[5]{2x-2} + 1$

c.  $y = \frac{1}{2} \sqrt[5]{2-x} - 1$

3. Найдите область значений функции

a.  $y = \sqrt[6]{4-x}$

b.  $y = \sqrt[3]{5x+1} + 10$

c.  $y = \sqrt[10]{5x} - 10$

4. Вычислите

a.  $\sqrt[6]{3\sqrt[3]{3^5}} : \sqrt[7]{9}$

b.  $\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{\frac{1}{5^3}}\right) : \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

c.  $\left(8^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

5. Решите уравнение  $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} = 5$

6. Сравните числа  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt[5]{\sqrt{31}}$ .

7. Вынесите переменные под знак корня  $-mn^3\sqrt[6]{-m^2n}$

8. Вынесите переменные из-под знака корня  $\sqrt[4]{-l^4m^5}$

9. Упростите выражение  $\frac{8v+1}{4v^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{v} + 1} - \frac{8v-1}{4\sqrt[3]{v^2} + 2v^{\frac{1}{3}} + 1}$

10. Постройте график функции, укажите ее свойства  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 1, \\ x^{\frac{1}{3}}, & x \geq 1. \end{cases}$

11. Напишите уравнение касательной к графику функции  $y = (2x+5)^{\frac{1}{2}}$  в точке 2.

12. Решите уравнение  $g'(x) = 0$ , если  $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x$ .

## Уровень С

1. Расположите числа в порядке возрастания  $\sqrt{2\pi}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\sqrt[3]{-2}$ , 2,5

2. Постройте график функции

a.  $y = 5 - 2\sqrt[4]{x+2}$ ,

b.  $y = \frac{1}{3}\sqrt[5]{-2x-2} + 3$

c.  $y = \sqrt[4]{\frac{3x^2-2x-1}{1-x} - \frac{4x^2-6x-4}{2-x}}$

3. Найдите область значений функции  $y = \sqrt[6]{2x^2 - 4x - 1}$

4. Упростите

a.  $\sqrt[4]{(1-\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[4]{a}) + \sqrt[8]{a^4}}$

b.  $\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{\frac{1}{5^3}}\right) : \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

c.  $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + y^3\right) + \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + y^3\right)$

5. Решите уравнение  $\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x+1}} = 2$

6. Сравните числа  $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$  и  $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ .

7. Внесите переменные под знак корня  $-mn^3\sqrt[6]{-mn}$
8. Вынесите переменные из-под знака корня  $\sqrt[4]{-l^4m^5} + \sqrt[4]{-l^7m^{12}}$
9. Вычислите  $15^{-2} \cdot 45^{\frac{5}{3}} : 75^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{8}}$
10. Постройте график функции, укажите ее свойства  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & -1 \leq x < 2, \\ 2(x-2)^{0,75}, & x \geq 2. \end{cases}$
11. Проведите касательную к графику функции  $y = 4\sqrt[4]{x}$ , параллельную прямой  $y = x - 2$ .
12. Решите уравнение  $g'(x) = 0$ , если  $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x$ .

### Звездные задачи

1. Найдите область определения функции  $y = \frac{\sqrt[4]{-x^3 + 5x^2 - 8x + 4}}{\sqrt{x^2 - 9|x| + 18}}$
2. Упростите выражение  $\frac{\sqrt[6]{a}}{2} + \frac{\sqrt[3]{b}}{2\sqrt[6]{a}} + \sqrt{\frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2}{4\sqrt[3]{a}}} + \sqrt[3]{b}$  и найдите его значение при  $a = 1, b = -8$
3. Вычислите  $\sqrt{33 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{3 + \sqrt{8}}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{8}}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{8}}}}$
4. Упростите  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$
5. Решите уравнение  $\sqrt[3]{(1+x)^2} + 2\sqrt[3]{(1-x)^2} = 3\sqrt[3]{1-x^2}$
6. Сравните  $\sqrt[3]{9999} + \sqrt[3]{10001}$  и  $2\sqrt[3]{10000}$
7. Назовем *белыми* числа вида  $\sqrt{a + b\sqrt{2}}$ , где  $a$  и  $b$  – целые, не равные нулю. Аналогично назовем *черными* числа вида  $\sqrt{c + d\sqrt{2}}$ , где  $c$  и  $d$  – целые, не равные нулю. Может ли черное число равняться сумме нескольких белых?
8. Составьте уравнение той касательной к графику функции  $y = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}$ , которая отсекает от осей координат треугольник площадью 0,75.
9. На графике функции  $y = x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x$  выбирают произвольную точку  $M$  и соединяют с началом координат  $O$ . Строят прямоугольник, диагональю которого является отрезок  $OM$ , а две стороны расположены на осях координат. Найдите наименьшее значение периметра такого прямоугольника.