

Теория

1. Решение уравнений вида $\sin t = a$. Примеры. Решение неравенств.
2. Решение уравнений вида $\cos t = a$. Примеры. Решение неравенств.
3. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} t = a$. Примеры. Решение неравенств.
4. Решение уравнений вида $\operatorname{ctg} t = a$. Примеры. Решение неравенств.
5. Методы решения тригонометрических уравнений. Метод замены. Примеры.
6. Методы решения тригонометрических уравнений. Метод разложения на множители. Примеры.
7. Однородные тригонометрические уравнения. Алгоритм их решения. Примеры.
8. Формулы синус и косинус суммы и разности аргументов. Вывод. Примеры.
9. Формулы тангенс и котангенс суммы и разности аргументов. Вывод. Примеры.
10. Формулы приведения. Мнемоническое правило. Вывод. Примеры.
11. Формулы двойного аргумента. Вывод. Примеры.
12. Формулы тройного аргумента. Вывод. Примеры.
13. Формулы понижения степени. Вывод. Примеры.
14. Формулы преобразования суммы в произведение. Вывод. Примеры.
15. Формулы преобразования произведения в сумму. Вывод. Примеры.
16. Формулы универсальной тригонометрической подстановки. Вывод. Применение.
17. Формула вспомогательного (дополнительного) аргумента. Вывод. Применение.

Уровень В

1. Докажите тождество

a. $\sin(x - y) - \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y$

b. $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 2$

c.
$$\frac{\cos^2(\pi - t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos(\pi + t)\cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)} = \cos^2 t$$

d. $\frac{1 + \cos 2t - \sin 2t}{1 + \sin 2t + \cos 2t} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$

2. Упростите:

a. $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$

b. $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

3. Зная, что $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, вычислите

a. $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$,

b. $\operatorname{tg} 2\alpha$

4. Решите уравнение

a. $3\cos^2 x - 4\sin x + 4 = 0$, найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$

b. $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} - \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} 2x + 1} = \sqrt{3}$, найдите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$

c. $\sqrt{3} \sin\left(\pi - \frac{x}{3}\right) + 3 \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

d. $\cos 6x - \cos 3x - 2 = 0$

e. $\cos x = \cos 5x$

f. $\sin 2x \cos x = \sin x \cos 2x$

g. $\cos \frac{x}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{x}{3} - 1 = 0$

h. $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = (\sin x - \cos x)^2$

i. $4\sin^3 x - 3\sin x + 2\cos 2x + 1 = 0$, укажите корни из промежутка $[-\pi; 0]$

5. Вычислите

a. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ \cos 30^\circ \cos 60^\circ$

b. $2 \sin 87^\circ \cos 57^\circ - \sin 36^\circ$

6. Постройте график функции $y = 2 \cos^2 x$. Опишите свойства функции.

7. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = 3 \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} - 5$

8. Решите неравенство $\sqrt{3} \sin x + \cos x > 1$

9. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2} \sin x + 1)(2 \sin x - 3) = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x < 0$

Уровень С

1. Упростите выражение:

a.
$$\frac{\cos t - 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + t \right)}{2 \sin \left(t - \frac{\pi}{6} \right) - \sqrt{3} \sin t}$$

b.
$$\frac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} \cdot \frac{\cos t}{1 + \cos t} \cdot \frac{\cos \frac{t}{2}}{1 + \cos \frac{t}{2}}$$

c.
$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$$

2. Зная, что $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = -\frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, вычислите

a. $\cos(\alpha + \beta)$

b. $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

3. Докажите, что значение выражения $\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \operatorname{tg} \beta}$ не зависит от значения β .

4. Вычислите

a.
$$\frac{\sin 75^\circ \cos 5^\circ - \cos 75^\circ \cos 85^\circ}{\cos 375^\circ \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \sin 365^\circ};$$

b.
$$\frac{\cos 150^\circ}{\sin 40^\circ} - \frac{\sin 150^\circ}{\cos 40^\circ}$$

c. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

5. Решите уравнение

a.
$$4 \cos^2 \left(-x - \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{3} \sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) \sin(\pi + x) + 3 \cos^2(x + \pi) = 3.$$

b. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$

c. $\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{7x}{2}$

d. $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$

e. $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \cos x$

f. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x + 4\cos^2 x = 0$

g. $\frac{2}{\operatorname{tg}^2(x+5\pi)} + \frac{1}{\sin(x-5\pi)} - 4 = 0$, укажите корни из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

h. $\frac{2\cos^3 x + 3\cos^2 x + \cos x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0$

6. Постройте график функции $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$. Опишите свойства функции.

7. Решите неравенство $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) \geq 0$

8. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = |7\sin 2x - 24\cos 2x| + 15$

9. Найдите все корни уравнения $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$

Звездные задачи

1. Докажите, что $\arccos \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

2. Докажите, что прямые $y = 3x + 1$ и $y = 6 - 2x$ пересекаются под углом в 45° .

3. Докажите, что $\frac{\sin 50^\circ + \cos 50^\circ}{\sqrt{2} \sin 85^\circ} = 1$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos 3x + \cos 2x - 4\cos^3 x$.

5. Постройте график уравнения $2\cos(x+y)\cos x = \cos y$

6. Решите уравнение

a. $\sqrt{9-x^2}(\sin 2x - 3\cos x) = 0$

b. $\sin 5x + \sin x = 2 + 2\cos^2 x$

c. $\sin \frac{5\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$

