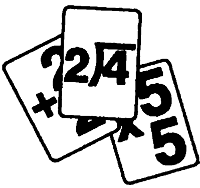
Серия
Библиотека
учителя

Э.Н. Балаян

1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике



3-е издание

Ростов-на-Дону
Феникс
2008

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э.Н. Балаян. — 3-е изд. — Ростов н/Д : Феникс, 2008. — 364, [1] с. : ил. — (Библиотека учителя).

ISBN 978-5-222-14785-6

В учёбном пособии рассмотрены различные методы решения олимпиадных задач разного уровня сложности для учащихся 5—11 классов. Часть задач посвящена таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, уравнения в целых числах, инварианты, принцип Дирихле и т.п. Ко многим задачам даны решения, к остальным — ответы и указания. Авторские задачи (их более 700) отмечены значком (А). В заключительной части книги приводятся занимательные задачи творческого характера, вызывающие повышенный интерес не только у школьников, но и у взрослых читателей.

Пособие предназначено ученикам 5—11 классов, учителям математики для подготовки детей к олимпиадам, студентам математических факультетов педагогических вузов и всем любителям математики.

ISBN 978-5-222-14785-6

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

© Балаян Э.Н., 2008
© Оформление: ООО «Феникс», 2008

Посвящается моей жене и верному помощнику — Белле Рубеновне

Предисловие

Роль олимпиад становится все более значимой. Не случайно многие технические вузы проводят математические олимпиады, преследуя цель — привлечь школьников в данный вуз. Следует заметить, что форма проведения этих олимпиад весьма близка к форме и содержанию вступительных экзаменов. Эти вузы устанавливают льготы для победителей и призеров различного уровня олимпиад.

Книга состоит из трех разделов. В первом разделе приводятся условия задач для 5–11 классов. Задачи, отмеченные значком (А), являются авторскими, составленными на протяжении многих лет педагогической деятельности.

Помимо школьных задач в пособии приведено множество задач, которые менее связаны со школьной программой, что вовсе не означает, что для их решения используются знания, выходящие за рамки школьной программы. Эти задачи посвящены таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, уравнения в целых числах, инварианты, принцип Дирихле и т.п. Более того, подобные задачи требуют для своего решения высокой логической культуры, умения сосредоточиваться длительное время на одной проблеме и способствуют вовлечению учащихся в подлинное математическое творчество.

Автор старался привести наиболее рациональные и изящные решения, доступные младшим школьникам, а также особо отмечать и четко формулировать те основные методы и идеи, которые наиболее часто применяются при решении задач данного типа. Разумеется, читатель может привести и другие, возможно, более изящные решения, за что автор будет весьма признателен.

Предлагаемые задачи также охватывают традиционные темы программы математики, по которым предлагаются задачи на олимпиадах областного уровня и выше.

Во втором разделе книги приводятся ответы, указания и решения ко многим задачам.

Учителя математики могут использовать материал книги в индивидуальной работе со способными учениками и, прежде всего, в школьных математических кружках.

Третий раздел книги содержит занимательные задачи творческого характера, направленные на формирование у детей навыков самостоятельной работы и приемов умственной деятельности, таких как анализ, синтез, аналогия, обобщение и др.

Автор ставит своей целью пробудить интерес к изучению математики. Радость открытия — одна из величайших радостей мыслящего человека.

Книга поможет вам более успешно усваивать школьную программу, и, возможно, для некоторых из вас, математика станет делом всей жизни.

Раздел I
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

5 класс

№ 1

Можно ли число 2007 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы произведение всех этих чисел тоже было равно 2007?

№ 2

Четыре утенка и пять гусят весят 4 кг 100 г, а пять утят и четыре гусенка весят 4 кг. Сколько весит 1 утенок?

№ 3

У каждого марсианина по 3 руки. Могут ли 13 марсиан взяться за руки так, чтобы не оставалось свободных рук?

№ 4

Существуют ли такие натуральные числа m и n, что $mn(m-n) = 2007$?

№ 5

x, y, k — три различные цифры. Если сложить все шесть трехзначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, то получим 5328. Найти эти цифры.

№ 6

В числе 3 728 954 106 зачеркнуть три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке составили бы наименьшее семизначное число.

№ 7

Вместо букв поставьте цифры так, чтобы получилось верное равенство:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} РАК \\ РАК \end{array} \\
\hline
МАК \\
+\ АКС \\
РАК \\
\hline
РКМАК
\end{array}
$$

№ 8

Сколько в зоопарке зверей и сколько птиц, если у них вместе 6000 ног и 2500 голов?

№ 9

Найти все двузначные числа, которые уменьшаются в 13 раз при зачеркивании последней цифры.

№ 10

За книгу заплатили 100 рублей и еще половину ее стоимости. Сколько стоит книга?

№ 11

Решить числовой ребус:

$$
+\begin{array}{r} МУХА \\ МУХА \\ \hline СЛОН \end{array}
$$

Здесь все гласные буквы соответствуют цифрам одной четности, а согласные — другой.

№ 12(А)

Не вычисляя, установить, правильной или неправильной дробью является значение выражения:

$$\frac{2006\cdot 13-1000}{2007\cdot 12+1000}.$$

№ 13(А)

Три яблока, четыре груши и один персик стоят 40 рублей. Одно яблоко, четыре груши и персик стоят 32 рубля.

Сколько стоит одно яблоко, одна груша и персик, если персик стоит столько, сколько стоят два яблока.

№ 14(А)

Какие две цифры нужно приписать к числу 2007 справа, чтобы получившееся шестизначное число делилось на 47?

№ 15(А)

Сколько четырехугольников изображено на рисунке?

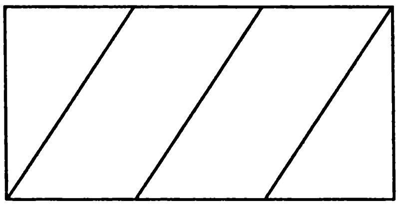


Рис. 1

№ 16(А)

Сыну 7 лет, а отцу 37. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

№ 17(А)

Длину прямоугольника увеличили на 40%, а ширину уменьшили на 40%. На сколько процентов изменилась площадь прямоугольника?

№ 18

Найти сумму всех трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2 и 3 так, чтобы в каждом числе все цифры были различны.

№ 19

Квадрат разделен на 9 равных клеток. Расставить в этих клетках числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы сумма чисел в каждой строке, столбце и по диагоналям равнялась 15.

№ 20

Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \text{ТЭТА} \\ \text{БЭТА} \end{array} \\ \hline \text{СУММА} \end{array}$$

№ 21(А)

Сколько нулей содержится в произведении натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 100$?

№ 22

Известно, что одна из четырех монет — фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. За какое число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно это определить?

№ 23(А)

Из города *А* в город *Б* ведут 3 дороги, а из города *Б* в город *В* — 5 дорог. Сколько всего различных маршрутов поездки из города *А* в город *В* через город *Б*?

№ 24

Дана последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ... 2007. Разрешается зачеркивать любые два числа и записывать вместо них их разность. Доказать, что если в конце остался один нуль, то где-то была допущена ошибка.

№ 25

Доказать, что если в трехзначном числе сумма крайних цифр равна средней, то число делится на 11.

№ 26(А)

Доказать, что отношение разности между двузначным числом и суммой его цифр к числу десятков равно 9.

№ 27(А)

Если из 225 кг руды получается 34,2 кг меди, то каково процентное содержание меди в руде?

№ 28(А)

На столе стоят 35 тарелок: 20 — вверх дном, а 15 — вниз дном. За один ход разрешается взять любые две тарелки и перевернуть их. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы все тарелки лежали вверх дном?

№ 29(А)

Углы в 40° и 60° имеют общую сторону. Какой угол образует биссектриса большего угла с общей стороной этих углов?

№ 30(А)

Найти координату точки $M(x)$, если расстояние от нее до точки $N(11\frac{5}{6})$ на числовом луче равно 5.

№ 31(А)

Сколько слагаемых с числителем 1 пропущено в примере $\frac{4}{17}+\frac{1}{17}+\ldots\frac{5}{17}=3$?

№ 32(А)

Число разделили на 7 и в частном получили 5 и остаток на 1 больше частного. Какое число разделили на 7?

№ 33(А)

Разность между первым и вторым числами равна разности между третьим и первым числами. Доказать, что первое число есть среднее арифметическое между вторым и третьим.

№ 34(А)

Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 1000 включительно.

№ 35(А)

На сколько среднее арифметическое всех четных чисел от 1 до 1000 больше или меньше среднего арифметического всех нечетных чисел от 1 до 1000?

№ 36(А)

Дедушка в лифте, а внучка по лестнице поднимаются на 7-й этаж за 36 с. За сколько секунд каждый из них поднимается на один этаж?

№ 37(А)

Разделить метр на две части так, чтобы разность между ними составляла 13 см.

№ 38(А)

Найти два последовательных натуральных числа, сумма которых равна 1001.

№ 39(А)

Можно ли между числами от 1 до 9 поставить знаки «плюс» и «минус» так, чтобы получилось число 40.

№ 40(А)

Хулиган Вася разорвал школьную стенгазету на 10 кусков. Затем некоторые из кусков он разорвал еще на 10 кусков, затем некоторые из кусков — еще на 10 кусков и т.д. На следующий день собрали 2007 кусков. Все ли кусочки нашли?

№ 41(А)

Доказать, что из трех целых чисел всегда можно найти два, сумма которых делится на 2.

№ 42(А)

Зачеркнуть в числе 20007425 пять цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.

№ 43(А)

Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее трехзначное число, чтобы получить наибольшее четырехзначное.

№ 44(А)

У крольчат и гусят вместе 44 ноги и 15 голов. Сколько крольчат и сколько гусят?

№ 45(А)

Если Сергей купит 15 тетрадей, то у него останется 7 рублей, если же 20 тетрадей, то у него не хватит 8 рублей. Сколько денег у Сергея?

№ 46(А)

Вычислить $101 \cdot 111\,111 - 101\,101 \cdot 111$.

№ 47(А)

Внуку столько месяцев, сколько лет бабушке, а вместе им 78 лет. Сколько лет внуку и сколько лет бабушке?

№ 48(А)

Можно ли прямоугольник 3×6 разрезать так, чтобы получилось два равных шестиугольника?

№ 49(А)

Участникам школьной викторины было предложено 30 вопросов. За правильный ответ давали 13 очков, а за неправильный списывали 10 очков. Один из участников ответил на все вопросы и набрал 160 очков. Сколько правильных ответов он дал?

№ 50(А)

Разность сторон прямоугольника равна 7 м. Меньшая сторона составляет 65% длины большей стороны. Вычислить периметр прямоугольника.

№ 51(А)

Развернутый угол разделен на 3 части так, что один из них в два раза меньше второго и в три раза меньше третьего. Найти градусную меру каждого из углов.

№ 52(А)

Сумма двух чисел равна 51. Найти эти числа, если 30% одного равны 60% другого.

№ 53(А)

Чтобы испечь хлеб, муку замешивают с равным ей по массе количеством воды. В печи тесто теряет 30% своей массы. Сколько нужно взять муки, чтобы испечь 7 т хлеба.

№ 54(А)

Каменный уголь содержит 1% воды. Через некоторое время он пропитывается водой так, что содержит уже 10% воды. На сколько при этом увеличится масса добытого угля в 100 т?

№ 55(А)

Который сейчас час, если истекшая часть суток равна 25% остающейся?

№ 56(А)

Сплавили 3 кг серебра 650-й пробы и 2 кг 720-й пробы. Какой пробы получился сплав?

№ 57(А)

Сколько прямоугольников изображено на рисунке 2? Площадь одного квадрата равна 1 см^2.

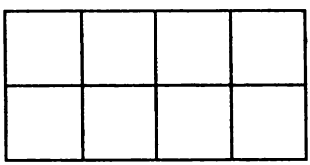


Рис. 2

№ 58(А)

В пакете 7 яблок. Как разделить эти яблоки между семью детьми, чтобы каждый ребенок получил по одному яблоку и чтобы одно яблоко осталось в пакете?

№ 59(А)

Расставить 14 стульев вдоль стен в актовом зале, имеющем форму квадрата, так, чтобы у каждой стены стульев стало поровну.

№ 60

Разместить числа 1, 2, 3, ..., 9, каждое по одному разу, вдоль сторон и в вершинах треугольника так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 20.

№ 61

Через 9 точек, расположенных в форме квадрата, провести 4 прямые линии, не отрывая ручки от бумаги.

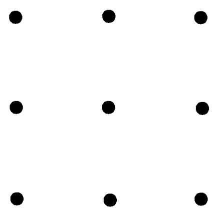


Рис. 3

№ 62(А)

У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры втрое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье братьев и сколько сестер?

№ 63(А)

Два поезда идут навстречу друг другу по параллельным путям; один со скоростью 60 км/ч, другой со скоростью 75 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шел мимо него в течение 4 секунды. Какова длина первого поезда.

№ 64(А)

Среди чисел вида $7n + 1$ найти первые 3 числа, которые делятся на 10.

№ 65(А)

Угадать корни уравнения $18 : x = 9 - x$.

№ 66(А)

Было 10 листов бумаги. Ученик разрезал некоторые из них на 4 части, после чего стало 28 листов. Сколько листов бумаги разрезал ученик?

№ 67(А)

Для нумерации страниц орфографического словаря понадобилось 1992 цифры. Сколько страниц было в этом словаре?

№ 68(А)

Средний возраст 11 игроков футбольной команды равен 24 года. При удалении одного из игроков с поля, средний возраст оставшихся игроков не изменился. Сколько лет удаленному игроку команды?

№ 69(А)

На трех прямых отметить 3 точки так, чтобы на каждой прямой оказалось по 2 точки.

№ 70(А)

Какова крепость (или концентрация) раствора соли, если к 720 г воды добавлено и растворено в ней 80 г соли?

№ 71

Собака, находясь в точке A, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 м от собаки. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы — 1 м. Собака делает два скачка в то время, когда лисица делает три скачка. На каком расстоянии от точки A собака догонит лисицу?

№ 72(А)

Разделить число 15000 на две части так, чтобы 5% первой части и 7% второй составили бы вместе столько же, сколько 6,5% всего числа.

№ 73

Расшифровать ребус:

$$\begin{array}{r} \text{СИНИЦА} \\ \text{СИНИЦА} \\ \hline \text{ПТИЧКИ} \end{array}$$

№ 74(А)

Какой цифрой оканчивается сумма: $2005^6 + 2006^6 + 2007^6$?

№ 75

По столбу высотой 10 м взбирается улитка. Днем она поднимается на 5 м, а ночью опускается на 4 м. Через сколько дней улитка достигнет вершины столба?

№ 76(А)

Доказать, что если сумма двух натуральных чисел меньше 17, то произведение их не больше 64.

№ 77(А)

Чему равна сумма цифр всех чисел от 1 до 50 включительно?

№ 78(А)

Дана дробь $\frac{13}{17}$. Какое число надо вычесть из числителя и знаменателя, чтобы получить дробь $\frac{2}{3}$?

№ 79(А)

На необитаемом острове живут 7 серых, 12 зеленых и 11 красных хамелеонов. При встрече двух хамелеонов разных цветов они меняют свой цвет на третий. Могут ли все хамелеоны приобрести одинаковый цвет?

№ 80

В двух автоколоннах было всего по 28 автомобилей в каждой. В обеих автоколоннах было всего 11 автомобилей марки «Опель», а остальные — «Порше». Сколько «Порше» было в каждой автоколонне, если известно, что в первой автоколонне на каждую машину «Опель» приходилось в два раза меньше «Порше», чем во второй?

№ 81 (А)

Мотоциклист проходит расстояние MN за 10 ч. На сколько процентов следует увеличить его скорость, чтобы то же расстояние он преодолел за 8 ч?

№ 82

Девять точек расположены так, как указано на рисунке. Сколько можно построить треугольников, одной из вершин которых является точка A, а двумя другими — две из остальных точек?

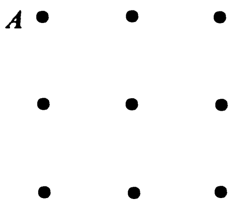


Рис. 4

№ 83 (А)

Пустить n — натуральное число. При $n = 1, 2, 3, ..., 13$ число вида $n^2 + n + 17$ — простое. Можно ли утверждать, что при любом $n \in N$ будем получать простые числа?

№ 84

Доказать, что из 101 числа можно выбрать два, разность которых делится на 100.

№ 85 (А)

При каких натуральных значениях n имеет место неравенство $3^n > 1000$?

№ 86 (А)

При каком наименьшем натуральном n число вида $n^2 + 2^n$ делится на 19?

№ 87

В некотором месяце три субботы пришлись на четные числа. Какой день недели был 25 числа этого месяца?

№ 88

Сколькими способами из отрезков длиной 7 см и 12 см можно составить отрезок длиной 1 м?

№ 89

Существует ли прямоугольник, у которого периметр численно равен площади?

№ 90(А)

Найти наибольшее трехзначное число, кратное 3, у которого все цифры различны и начинаются цифрой 7.

№ 91

Один рабочий может выкопать колодец глубиной 2 метра и диаметром 1 метр в течение 4 часов. В течение скольких часов могут выкопать этот колодец 8 рабочих?

№ 92(А)

Класс шел парами. Один из учеников глянул вперед и насчитал 8 пар, затем обернулся назад и насчитал 4 пары. Сколько всего участников шло в колонне?

№ 93

Можно ли квадрат разделить на 5 частей и собрать восьмиугольник? (См. рис. 5.)

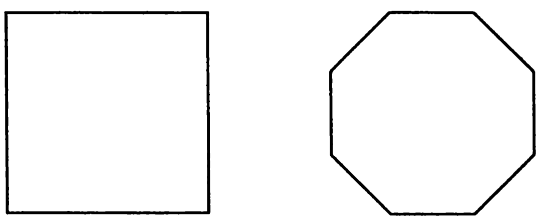


Рис. 5

№ 94

В кастрюлю необходимо налить 4 л воды. У хозяйки есть только два сосуда: один емкостью 5 л, а второй емкостью 3 л. Как поступила хозяйка?

№ 95

Учитель истории решил забрать учеников двух шестых классов на экскурсию. Когда он их построил парами, оказалось, что один человек остался без пары. То же самое произошло, когда учитель хотел построить учеников тройками и четверками. Каждый раз оставался один ученик. И только лишь когда он построил всех пятерками не осталось ни одного ученика вне строя. Сколько было учеников?

№ 96

В одной семье 5 братьев. У каждого брата есть сестра. Сколько всего детей в этой семье?

№ 97

Сумма трех натуральных чисел равна их произведению. Найти эти числа.

№ 98(А)

На сколько процентов увеличится объем куба, если длину каждого ребра увеличить на 10%.

№ 99(А)

Каменщик один может выполнить работу за 3 дня, а с помощью ученика — за 2 дня. За сколько дней выполнит всю работу ученик самостоятельно?

№ 100(А)

При каких значениях x выражение $\dfrac{3}{3-\dfrac{3}{|x-3|}}$ не имеет смысла?

№ 101

Разрезать крест на 4 части и сложить из получившихся частей квадрат (рис. 6).

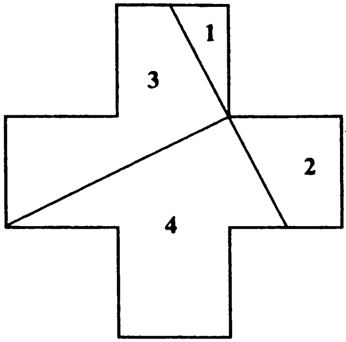


Рис. 6

№ 102

Как мудрецы разделили шахматную доску с алмазами на 4 одинаковые части с одним алмазом в каждой?

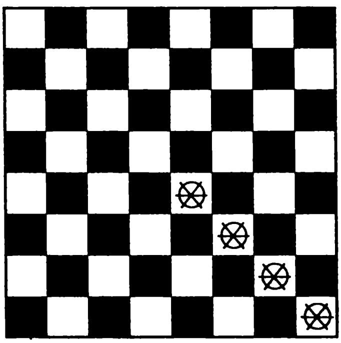


Рис. 7

№ 103

У одного фермера был квадратный участок земли, на котором росли 24 дерева (рис. 8). В своем завещании он пожелал, чтобы каждый из его восьми сыновей получил одинаковое количество земли и равное число деревьев. Как наипростейшим образом разделить землю?

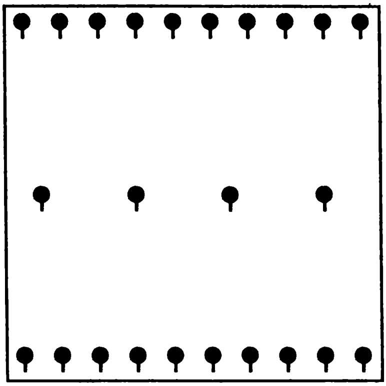


Рис. 8

№ 104

Белка взбирается на ствол дерева по спирали, поднимаясь за один виток на 2 м. Сколько метров она преодолеет, добравшись до вершины, если высота дерева равна 8 м, а окружность 1,5 м?

№ 105

Расположить 16 спичек, как показано на рисунке, чтобы они образовали 8 равносторонних треугольников (рис. 9). Теперь уберите 4 спички так, чтобы при этом осталось только 4 равных треугольника. Не должно оставаться ни лишних спичек, ни свободных концов.

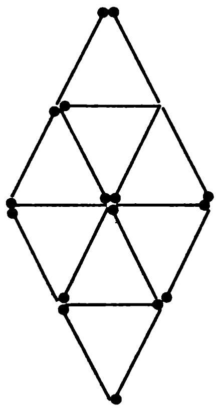


Рис. 9

№ 106

В клетках квадрата переставьте числа так, чтобы их сумма по любой вертикали, горизонтали и диагонали была одна и та же.

3	5	7
9	11	13
15	17	19

Рис. 10

6 класс

№ 1

Какая дробь больше $\frac{2005}{2006}$ или $\frac{2006}{2007}$?

№ 2

Не выполняя действий, установить, правильной или неправильной дробью является число $\frac{377 \cdot 489 - 113}{377 + 489 \cdot 376}$.

№ 3

Найти наименьшее натуральное число, при делении которого на дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{9}$ в частном получаются целые числа.

№ 4

Найти дробь, которая не изменит своей величины, если к числителю прибавить 17, а к знаменателю 13. Найти общий вид таких дробей.

№ 5

Сколько раз цифра 7 встречается в записях всех чисел от 40 до 100?

№ 6

Число a в 7 раз больше b, а b меньше c в 5 раз. Найти НОК и НОД чисел a, b и c.

№ 7

Если из двузначного числа вычесть сумму его цифр, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти данное число.

№ 8(А)

Сколько существует различных прямоугольников с площадью 48 м^2, стороны которых выражаются целым числом метров?

№ 9(А)

Если к деньгам Сергея прибавить еще 80% этих денег, то получится 9000 рублей. Сколько денег у Сергея?

№ 10

Можно ли вырезать из квадрата 3×3 дм круг, длина окружности которого 4π дм?

№ 11

Решить числовой ребус

$$\text{ПЧЕЛКА} \times 7 = \text{ЖЖЖЖЖЖ}.$$

(Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам.)

№ 12(А)

Найти все двузначные числа, которые при делении на 7 дают в остатке 5, а при делении на 19 — остаток 9.

№ 13(А)

Найти два положительных целых числа, разность которых равна их частному.

№ 14(А)

Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} 1\,7\,7\,7 \\ +\ \text{КАРЛ} \\ \hline \text{ГАУСС} \end{array}$$

УС — простое число.

№ 15(А)

Является ли число 134444431 простым?

№ 16(А)

Доказать, что дробь $\dfrac{m(m-5)}{2}$ есть целое число при любом натуральном m.

№ 17(А)

Сергей и Николай вместе весят 92 кг, Сергей и Костя весят 95 кг, а Николай и Костя весят 97 кг. Сколько весят вместе Сергей, Николай и Костя?

№ 18(А)

Прямоугольник со сторонами 4 и 16 см наложили на квадрат со стороной 8 см (рис. 11). Доказать, что площади заштрихованных частей данных фигур равны.

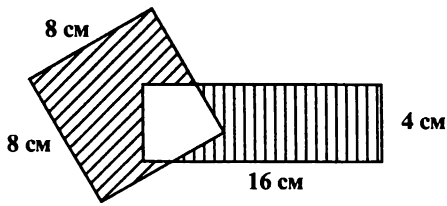


Рис. 11

№ 19(А)

Несколько кошек съели 157 мышек, причем все кошки съели по одинаковому числу мышек. Сколько было кошек, если каждая кошка съела больше мышек, чем было кошек?

№ 20(А)

В классе провели контрольную работу по математике. Средняя оценка мальчиков — 3,8; девочек — 3,5; класса — $3\frac{8}{13}$. Сколько человек писало контрольную, если их больше 20 и меньше 30.

№ 21(А)

От пола комнаты вертикально вверх по стене ползли два паука. Поднявшись до потолка, они поползли обратно. Первый поднимался и опускался с одной и той же скоростью, второй поднимался втрое медленней первого, а спускался — втрое быстрее. Какой из пауков спустился быстрее?

№ 22(А)

Заменить в числе 76*4*8 звездочки цифрами так, чтобы оно делилось на 72. Указать все такие числа.

№ 23(А)

Зарплата служащего увеличилась на 10%, а через некоторое время еще на 15%. На сколько процентов всего увеличилась зарплата?

№ 24(А)

Волк и Заяц купили теннисный мяч за 25 руб. У Зайца было в 2 раза меньше денег, чем у Волка, да еще рубль. Сколько денег внес каждый из них?

№ 25(А)

Найти все двузначные числа, которые одновременно являются квадратами и кубами.

№ 26(А)

Решить уравнение $x - 6 = 2ax$.

№ 27(А)

Найти длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

№ 28(А)

17 учеников собрали 100 арбузов. Доказать, что какие-то два из них собрали одинаковое число арбузов.

№ 29(А)

Найти сумму

$-1002 - 1001 - 1000 - 999 - \ldots + 1002 + 1003 + 1004.$

№ 30(А)

Дано: $100 = 100 + 98 + 96 + \ldots + x$.

Сколько слагаемых расположено в правой части равенства?

№ 31(А)

В трехзначном числе $\overline{abc}$, цифры которого различны, выполняется соотношение $\overline{ab} = a + b + c$.

Найти наименьшее трехзначное число.

№ 32(А)

Сравнить дроби $\frac{1313}{1717}$ и $\frac{13}{17}$.

№ 33(А)

$7 + \frac{7}{6} = 7 \cdot \frac{7}{6}$ — верное равенство. Сколько существует подобных равенств?

№ 34(А)

В записи 7*462* заменить звездочки цифрами так, чтобы полученное число делилось на 12. Указать наибольшее и наименьшее из полученных чисел.

№ 35(А)

Решить уравнение $|-0{,}42| : |x| = |-0{,}7|$.

№ 36(А).

Школьный портфель стоил 600 р. Через некоторое время цену увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Какой стала цена портфеля?

№ 37(А)

Расположить числа $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ в порядке убывания.

№ 38(А)

По кругу написано 2007 натуральных чисел. Доказать, что найдутся два соседних числа, сумма которых четна.

№ 39(А)

Масса канистры с бензином 40 кг, без бензина — 2 кг. Какова масса канистры, заполненной бензином наполовину?

№ 40(А)

В классе 27 учеников. Их них 19 учеников посещают математический кружок, 6 — химический, а 5 учеников не посещают эти кружки. Сколько химиков увлекается математикой?

№ 41(А)

Указать последнюю цифру числа
$2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004 \cdot 2005 + 2006^2 \cdot 2007^2$.

№ 42(А)

Дан прямоугольник $MNPK$, где $M(-2; -2)$, $N(5; -2)$, $K(5; 3)$, $P(-2; 3)$. Задать с помощью двойного неравенства:

а) множество абсцисс всех точек прямоугольника;

б) множество ординат всех точек прямоугольника.

№ 43(А)

В книге 160 страниц. В I день ученик прочитал $\frac{1}{4}$ всей книги, во II день прочитал 65% остатка, а в III день — остальную часть книги. По сколько страниц книги ученик читал каждый день?

№ 44(А)

Прямоугольная плитка шоколада разделена углублениями на 4×5 маленьких прямоугольника. Сколько раз нужно разламывать шоколад, чтобы разделить его на эти маленькие прямоугольники?

№ 45(А)

Если между цифрами двузначного числа вписать 1, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше исходного. Найти это число.

№ 46(А)

Найти все двузначные числа, половина которых равна сумме своих цифр.

№ 47(А)

Два поезда вышли в разное время навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 1231 км. Скорость первого поезда 50 км/ч, а второго — 59 км/ч. Пройдя расстояние 700 км, первый поезд встретился со вторым. На сколько часов один из них вышел раньше другого?

№ 48(А)

Сплав состоит из золота и меди. Масса меди относится к массе золота как 3:5. Определить массу золота в сплаве, зная, что масса меди в нем равна 60 г.

№ 49

Решить уравнение $|x - 6{,}2| = 6{,}2$.

№ 50(А)

В школе 29 классов, 1000 учеников. Есть ли в школе класс, в котором меньше 35 учеников?

№ 51(А)

На окраску куба размерами $3 \times 3 \times 3$ необходимо 3 г краски. Сколько краски пойдет на окраску куба размером $6 \times 6 \times 6$?

№ 52(А)

79 лошадей разместили в 13 конюшнях. Почему хотя бы в одной конюшне будет обязательно нечетное число лошадей?

№ 53(А)

Имеется пять кубиков, которые отличаются друг от друга только цветом: 2 красных, 1 белый и 2 черных. Есть два ящика A и B, причем в A помещается 2 кубика, а в B — 3 кубика. Сколькими различными способами можно разместить эти кубики в ящиках A и B?

№ 54(А)

Заменить звездочки цифрами так, чтобы получилось верное равенство (учесть, что возможны различные решения):

$$\frac{4}{*} - \frac{*}{6} = \frac{5}{18}.$$

№ 55(А)

Разделить число 1025 обратно пропорционально числам:

$$\frac{1}{3};\ 0{,}8;\ 2\frac{1}{4};\ 1.$$

№ 56(А)

Произведение трехзначного числа на 6 есть куб натурального числа. Найти все такие числа.

№ 57(А)

Сколько цифр содержит число 777...77, если известно, что оно кратно 19?

№ 58(А)

Существует ли наибольшее и наименьшее 10-значное число, кратное 19, в записи которого каждая цифра используется 1 раз?

№ 59(А)

Доказать, что при любом целом a, выражение $(a^2 - 3a)$ делится на 2.

№ 60

Фигура, изображенная на рисунке 12 состоит из 8 спичек, наложенных друг на друга. Снять две спички так, чтобы осталось 3 квадрата.

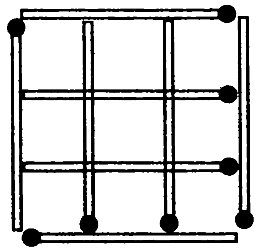


Рис. 12

№ 61(А)

Решить уравнение $\dfrac{37{,}02}{x+3}=\dfrac{1{,}234}{10{,}1}$.

№ 62(А)

Прямоугольник разделен на 4 прямоугольника (рис. 13), площади трех из которых равны 2 см^2, 4 см^2, 6 см^2. Найти площадь данного прямоугольника.

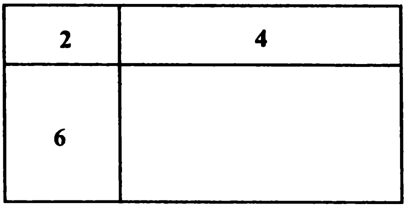


Рис. 13

№ 63(А)

Найти наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 100.

№ 64

Из «Греческой антологии»:

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

№ 65(А)

Доказать, что дробь $\dfrac{6n+4}{8n+5}$ несократима при любом целом n.

№ 66(А)

Разность между двузначным числом и произведением его цифр равна учетверенному произведению суммы его цифр. Найти это число.

№ 67(А)

Найти двузначное число, которое равно сумме квадрата числа его десятков и куба числа его единиц.

№ 68(А)

Найти наибольшее трехзначное число, которое в 19 раз больше суммы своих цифр.

№ 69

Бассейн наполняется первой трубой за 5 ч, а через вторую трубу он может быть опорожнен за 6 ч. Через сколько часов будет наполнен весь бассейн, если одновременно открыть две трубы?

№ 70(А)

Прямой угол разделен на три части так, что величина второго угла на 10° больше третьего и на 10° меньше первого угла. Найти градусную меру каждого из углов.

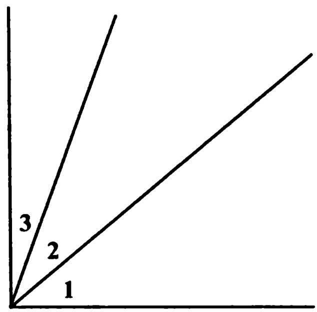


Рис. 14

№ 71

Найти число, 4,8% которого равно

$$\frac{15\frac{13}{29}\cdot 3{,}625+28:\frac{7}{15}}{\frac{20}{49}\cdot 9{,}8+0{,}625:0{,}75}.$$

№ 72

Разделить 125 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй, как 2:3, вторая к третьей, как 3:5, а третья к четвертой, как 5:6.

№ 73(А)

Разность между двузначным числом и произведением его цифр равна квадрату числа единиц. Найти все такие числа.

№ 74(А)

На сколько третья часть числа больше его четвертой части и во сколько раз больше?

№ 75(А)

Какая правильная дробь увеличится в 7 раз, если к ее числителю прибавить её знаменатель?

№ 76(А)

Сколько среди чисел от 1 до 50 включительно таких, которые записаны только нечетными цифрами?

№ 77(А)

Как изменится величина дроби, если числитель увеличить на 50%, а знаменатель уменьшить на 50%?

№ 78(А)

Сколько процентов составляет НОК (16; 72) от НОД (16; 72)?

№ 79(А)

Доказать, что $ax + 3x + 4ay + 12y + 9 = a^2$, если $a - 3 = x + 4y$.

№ 80(А)

Доказать, что число $\overline{abba}$ делится на 11.

№ 81(А)

Доказать, что при любых m и n
$(7m - 21n - 7)(m^4 + 3m^4n - m^5) \leq 0$.

№ 82(А)

Найти значение выражения
$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 3$, если $x^2 - x = 1$.

№ 83(А)

Вычислить наиболее рациональным способом:

$$\frac{7}{17}\cdot\left(3\frac{2}{5}\cdot 6\frac{3}{7}+3\frac{4}{7}\cdot 3{,}4\right).$$

№ 84(А)

Решить уравнение $x^3 + x^2 = 0$.

№ 85(А)

Расшифровать запись сложения (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры):

$$\begin{array}{r} \text{КНИГА} \\ +\,\text{КНИГА} \\ \text{КНИГА} \\ \hline \text{НАУКА} \end{array}$$

№ 86(А)

Скорость автобуса от *А* до *Б* составляла 60 км/ч, а от *Б* до *А* — 40 км/ч. Чему равна средняя скорость автобуса?

№ 87(А)

Решить уравнение $|x| = \frac{x}{3} + 3$.

№ 88(А)

Какая цифра стоит в конце числа, выражающего произведение $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot ... \cdot 17 \cdot 19$?

№ 89(А)

На трех полках лежат 52 книги. Если 3 книги с третьей полки переложить на вторую, то на первой и третьей полках книг станет поровну, а на второй вдвое больше, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке?

№ 90(А)

Сколько раз к наибольшему двузначному числу нужно прибавить наибольшее трехзначное число, чтобы получить наибольшее пятизначное?

№ 91(А)

Сумма двух чисел равна 85, а их наименьшее общее кратное 102. Найти эти числа.

№ 92

Какую цифру нужно дописать справа к числу 250, чтобы образованное четырехзначное число имело два простых делителя, оканчивающиеся дописанной цифрой.

№ 93(А)

Для числа 789 найти такое трехзначное число, разность между которым и данным делилась бы на 9 и на 99.

№ 94(А)

Найти наибольшее десятичное число, кратное 45, у которого все цифры различны.

№ 95(А)

Найти наименьшее число, которое записано только единицами и делится на 77.

№ 96

Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{ЛЕТО} \\ +\,\text{ЛЕТО} \\ \hline \text{ПОЛЕТ} \end{array}$$

№ 97(А)

Вычислить наиболее простым способом:

$$\frac{1}{13\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

№ 98

Делители числа 6 (не считая самого числа) это: 1, 2 и 3. Их сумма $1 + 2 + 3 = 6$ равна самому числу. Существует ли двузначное число, обладающее указанным свойством?

№ 99

Ма́шины часы опаздывают каждый час на 2 минуты. Если по радио передают сигнал 12 часов, то через сколько времени на часах Маши будет 12 часов, если ее часы показывали точное время ровно 5 часов тому назад?

№ 100

В актовом зале собрались школьники: мальчики и девочки. Их всего было больше 70, но меньше 90. Всего скамеек, на которых сидели школьники, было на 1 больше, чем сидело на каждом из них мальчиков. Девочки сидели по одной на каждой скамейке. Сумма числа скамеек и мальчиков составляла число школьников. Сколько школьников находилось в зале и на скольких скамейках они сидели?

№ 101

Из-под земли бьют 4 источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй — за 2 дня, третий — за 3 дня и четвертый — за 4 дня. За сколько времени наполнят бассейн все 4 источника вместе?

№ 102

Некто, умирая, завещал: «Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано $\frac{2}{3}$ имения, а жене — вся остальная часть. Если же родится дочь, то ей — $\frac{1}{3}$, а жене — $\frac{2}{3}$». Родилась двойня — сын и дочь. Как же разделить имение?

№ 103

30 птиц сто́ят 30 монет, куропатки сто́ят по 3 монеты, голуби — по 2 и пара воробьев — по монете; спрашивается, сколько птиц каждого вида.

№ 104

Вершина A квадрата $ABCD$ расположена в центре квадрата $MNFE$, а сторона AB отсекает третью часть стороны FN. Найти площадь общей части двух квадратов, если $AB = FN$.

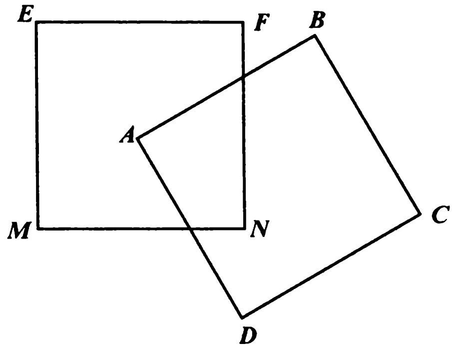


Рис. 15

№ 105(А)

Доказать, что рациональное число $\frac{3}{5}$ можно представить как конечную сумму различных дробей с числителями, равными единице.

7 класс

№ 1

Решить в целых числах уравнение $xy = x + y + 4$.

№ 2

В турнире по футболу участвовало 7 команд, которые набрали 14, 13, 9, 8, 7, 4 и 3 очка. За победу присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Сколько матчей в турнире закончилось вничью?

№ 3

Разложить многочлен $x^8 + x^4 + 1$ на три множителя.

№ 4

Найти сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2006\cdot 2007}$.

№ 5

Если на каждую палку сядет по 5 галок, то одна галка останется без палки, а если на каждую палку сядет по 6 галок, то одна палка остается пустой. Сколько галок и сколько палок?

№ 6

Имеется 2007 переключателей. Изначально они все выключены. Разрешается выбрать любые два и перевернуть их в противоположное положение (т.е. выключенные включить, а включенные — выключить). Можно ли, проделав несколько раз эту операцию, привести их все во включенное состояние?

№ 7

Существуют ли четыре натуральных числа, сумма и произведение которых нечетны?

№ 8

В классе 27 учеников. Каждый из них написал двум товарищам по записке. Может ли оказаться, что каждый из них получил нечетное число записок?

№ 9

Найти наибольшее значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр.

№ 10

Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, является точным квадратом. Найти все такие числа.

№ 11

Решить числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{БУЛОК} \\ +\quad \text{БЫЛО} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$$

Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам.

№ 12(А)

Вычислить наиболее рациональным способом:

$$5\frac{1}{7}\cdot 4\frac{1}{19}-1\frac{6}{7}\cdot 9\frac{8}{19}-2.$$

№ 13(А)

Сколько существует трехзначных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 2?

№ 14(А)

Число 7 возвели в 19-ю степень. Полученное число вновь возвели в 19-ю степень и т.д. Возведение повторено 2007 раз. Определить последнюю цифру полученного числа.

№ 15(А)

Сколько существует трехзначных чисел-квадратов, у которых сумма цифр совпадает с двумя первыми цифрами исходного числа?

№ 16(А)

Две стороны треугольника равны соответственно 2 см и 13 см. Найти длину третьей стороны, если она выражается целым числом сантиметров, кратным 7.

№ 17(А)

На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка M. Биссектриса $\angle CDM$ пересекает сторону BC в точке N. Доказать, что $AM + NC = DM$.

№ 18(А)

У четырех братьев всего 32000 руб. Если деньги I брата увеличить на 7 руб., деньги II уменьшить на 7 руб., деньги III увеличить в 7 раз, а деньги IV уменьшить в 7 раз, то у братьев станет денег поровну. Сколько денег было у братьев первоначально?

№ 19(А)

Упростить $\sqrt{20-2\sqrt{91}}+\sqrt{20+2\sqrt{91}}$.

№ 20

Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{ПАРК} \\ + \quad \text{ПАР} \\ \text{ПА} \\ \text{П} \\ \hline 1987 \end{array}$$

№ 21(А)

Представить двучлен $3x^4 + 16$ в виде суммы трех квадратов.

№ 22(А)

100 мышей за 100 дней съедают 200 кг крупы. Сколько зерна съедят 10 мышей за 10 дней?

№ 23(А)

Разложить многочлен $x^8 + x + 1$ на два множителя с целыми коэффициентами.

№ 24(А)

Известно, что $\angle PLR$ и $\angle RLS$ — смежные и $\angle RLS = 80\% \angle PLR$. Найти величину каждого из углов.

№ 25

Что больше 2^{2^2}, 22^2 или 2^{22}?

№ 26

Найти угол между биссектрисами смежных углов.

№ 27(А)

Разность между двузначным числом и суммой его цифр есть квадрат. Найти все такие числа.

№ 28(А)

Решить уравнение $(a^2-9)x = 7a^2-20a-3$.

№ 29(А)

При каком значении a прямая $y = ax + 5$ проходит через точку $M(-3; 2)$?

№ 30(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{x-2y}+\dfrac{20}{3x+2y}=3, \\ \dfrac{12}{x-2y}-\dfrac{40}{3x+2y}=1. \end{cases}$$

№ 31(А)

Построить график уравнения $(x + 3)(y - 2) = 0$.

№ 32(А)

Число 128 разложить на два слагаемых так, чтобы $\dfrac{1}{7}$ первого слагаемого была равна $\dfrac{1}{9}$ второго.

№ 33(А)

Решить уравнение $|-7x|\cdot|-9{,}1|=182$.

№ 34(А)

В трапеции $ABCD$ AD — большее основание, BC — меньшее, AC — биссектриса $\angle A$. Доказать, что ΔABC — равнобедренный.

№ 35(А)

График какой функции изображен на рисунке 16?

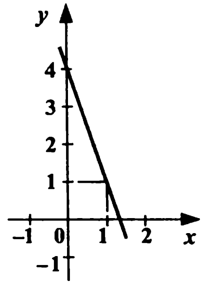


Рис. 16

№ 36(А)

Доказать, что число $n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном n.

№ 37(А)

Доказать, что при любых $x \neq 0$, $y \neq 0$, значение выражения $x^2 + xy + y^2 > 0$.

№ 38(А)

Вычислить наиболее рациональным способом значение выражения:

$$\left(\frac{918}{153}+\frac{745}{149}\right)\left(\frac{918}{153}-\frac{745}{149}\right).$$

№ 39(А)

Длину каждой стороны квадрата увеличили на 40%. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

№ 40(А)

Сумма цифр двузначного числа равна 11. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

№ 41(А)

Сократить дробь $\frac{2-5m+2n+5mn}{10m^2-9m+2}$.

№ 42(А)

Решить уравнение $\frac{x^2}{x-4}=\frac{16}{x-4}$.

№ 43(А)

Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases}4x+2y=10,\\6x+3y=15.\end{cases}$$

№ 44

Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы I бригада получила другое задание, поэтому II бригада закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. На сколько дней II бригада убрала бы весь урожай быстрее I, если бы каждая бригада работала отдельно?

№ 45

Решить уравнение $|5x-2|=8$.

№ 46(А)

Один из двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей составляет 80 процентов от другого. Найти величину большего угла.

№ 47

Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найти угол между ними.

№ 48(А)

Построить график функции $x+\frac{|y|}{2}=\frac{x}{2}+|x|$.

№ 49(А)

Если между цифрами двузначного числа вписать нуль, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше исходного. Найти это число.

№ 50(А)

Найти двузначные числа, равные квадрату суммы своих цифр.

№ 51

Построить прямую, равноудаленную от трех данных точек, не лежащих на одной прямой.

№ 52

Построить прямоугольный треугольник по катету a и разности b между гипотенузой и другим катетом.

№ 53

Решить числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{КОКА} \\ +\,\text{КОЛА} \\ \hline \text{ВОДА} \end{array}$$

№ 54(А)

Найти хотя бы одно натуральное число n, при котором число $2^n + 3$ будет составным.

№ 55(А)

Какой цифрой оканчивается десятичная запись числа $14^x + 14^{x+1} + 14^{2x}$, где $x \in N$.

№ 56

Из 22 спичек составить прямоугольник наибольшей площади.

№ 57(А)

Даны 2007 чисел, каждое из которых равно 1 или –1. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы суммы чисел, входящих в каждую группу, были бы равны?

№ 58(А)

Пять дробей с числителями 1 и различными знаменателями (натуральными) дают в сумме 1. Найти эти дроби.

№ 59(А)

Найти значение выражения $(x-7)^{(x-8)^{(x-9)^{(x+9)^{(x+8)}}}}$, если $x = 10$.

№ 60(А)

Известно, что $(x-4)^{x+3} = (x-4)^{x+5}$. При каких x это равенство верно?

№ 61(А)

Найти наименьшее трехзначное число, равное сумме всевозможных перестановок двузначных чисел, образованных его цифрами.

№ 62(А)

Построить график функции $y = \dfrac{x-4}{|x-4|}$.

№ 63(А)

На доске написаны в строку 2007 целых чисел. Доказать, что из них можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 2006 чисел?

№ 64(А)

Доказать, что $1 + 13 + 13^2 + \ldots + 13^{2006} + 13^{2007}$ не делится на 7.

№ 65(А)

Доказать, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

№ 66(А)

Доказать, что квадрат нечетного числа вида $2n + 3$ при делении на 8 всегда дает в остатке 1.

№ 67(А)

Доказать, что сумму трех квадратов вида $(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$ можно представить в виде суммы шести квадратов.

№ 68(А)

В ΔABC $\angle A = 60°$. Вычислить величину угла между биссектрисами углов B и C.

№ 69

С помощью циркуля и линейки разделить угол в 54° на три равные части.

№ 70(А)

Вычислить значение $3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 + y^2$, если $x^2 + y^2 = 1$.

№ 71(А)

Разность между двузначным числом и суммой его цифр есть полный квадрат. Найти все такие числа.

№ 72

Доказать, что число $p^2 - 1$ делится на 24, если p — простое число и $p > 3$.

№ 73

Доказать, что разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8.

№ 74(А)

Найти x и y в числе $\overline{5678xy}$, которое кратно 24.

№ 75(А)

Найти двузначные числа, равные неполному квадрату суммы своих цифр.

№ 76(А)

Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 3x + 9y = 5. \end{cases}$$

№ 77(А)

Найти двузначное число, если известно, что цифра его единиц больше цифры десятков на 2 и произведение искомого числа на сумму его цифр равна 144.

№ 78(А)

При каком значении k графики функций $y = -2x + 1$ и $y = kx + 1$ взаимно перпендикулярны?

№ 79(А)

Решить уравнение $\dfrac{\left(\frac{1}{7}-2x\right)\left(\frac{5}{32}-x\right)}{4x-\frac{5}{8}}=0.$

№ 80(А)

Вычислить $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{7}}}}$.

№ 81(А)

Три последовательных натуральных числа дают в сумме 111. Найти эти числа.

№ 82(А)

Из канистры отлили $\frac{1}{4}$ часть бензина, потом 10% её общей емкости. После этого в канистре осталось 26 л бензина. Какова емкость канистры?

№ 83(А)

Найти x, y и z, для которых справедливо равенство $(x-4y)^2+(y+1)^2+|x+y+z|=0$.

№ 84

Немецкий математик М. Штифель (1487–1567) утверждал, что числа вида $2^{2n+1} - 1$, $n \in N$ являются простыми. Прав ли он?

№ 85(А)

О числах x, y, z и t известно, что $z < x$, $t = y$, $z > y$. Сравнить числа x и y.

№ 86(А)

Пусть m и n такие натуральные числа, что число $3m + 4n$ делится на 13. Доказать, что число $28m + 98n$ также делится на 13.

№ 87(А)

Можно ли записать 1000000 в виде произведения двух чисел, в записи которых не было бы ни одного нуля?

№ 88(А)

На рисунке 17:

$\angle 1 = 70° + x - y$,

$\angle 1 - \angle 2 = 50° + 2x - 2y$.

Доказать, что $MB \perp BN$.

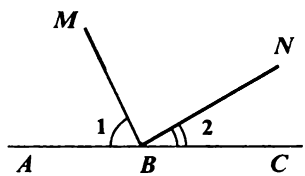


Рис. 17

№ 89(А)

Разность между квадратом суммы и суммой цифр двузначного числа равна самому числу. Найти все такие числа.

№ 90(А)

Квадрат суммы цифр двузначного числа дает это же число, но записанное в обратном порядке. Найти все такие числа.

№ 91(А)

Найти все трехзначные числа, кратные 7 и представимые в виде суммы квадрата и куба одного и того же целого числа.

№ 92(А)

Доказать, что число $a + b$ делится на 7, если на 7 делится число $a^2 + 9ab + b^2$.

№ 93(А)

Найти t, если известно, что при любом x:

$$\begin{array}{r} ax^2 + bx + c \\ +\ \ bx^2 + ax - 9 \\ tx^2 + cx + 7 \\ \hline 11x^2 + 13x + 2 \end{array}$$

№ 94(А)

Построить график функции $y = |x| - 2$.

№ 95

Разложить на множители $x^5 - 1$.

№ 96(А)

Существуют ли такие значения a, при которых число $a - 2$ является корнем уравнения $x^3 - ax^2 + 2 = 0$?

№ 97(А)

Разложить на множители:

$$(a + 1)^4 + 4(a + 1)^3 + 4a(a + 2).$$

№ 98(А)

Определить вид четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения прямых: $y = x + 2$, $y = x - 2$, $y = -x + 2$, $y = -x - 2$.

№ 99(А)

Корни уравнения $3x^3 - ax^2 - 7x + b = 0$ равны 1 и -2. Найти a и b.

№ 100(А)

В ΔMSN $\angle M = 35°$, $\angle N = 25°$, $MK = SK$, $SP = PN$. Найти $\angle KSP$.

№ 101(А)

Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели соответственно пропорциональны числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найти эти дроби.

№ 102

Доказать, что произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

№ 103

Найти четыре последовательных натуральных числа, произведение которых равно 1680.

№ 104

Доказать, что $a^4 + 4$ есть число составное при любом натуральном $a > 1$.

№ 105

Доказать, что всякое трехзначное число, написанное одинаковыми цифрами, делится на 37.

№ 106

Сократить дробь $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x-y)(x^3 - y^3)}$.

№ 107(А)

Решить графически уравнение $|x| = x - 3$.

№ 108

Доказать, что $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, где a и b — действительные числа.

№ 109(А)

Разложить на множители $a^4 - 3a^2 + 1$.

№ 110(А)

Решить уравнение $(x - 4)^3 = |x + 24|^2 - 640$.

№ 111

Рабочий копал яму. На вопрос прохожего, какой глубины будет яма, которую он роет, рабочий ответил: «Мой рост 1 м 80 см. Когда я вырою яму до конца, то моя голова будет на столько ниже уровня земли, на сколько сейчас, когда я уже вырыл половину, она находится выше её уровня». Какой глубины яму роет рабочий?

№ 112(А)

Для нумерации страниц орфографического словаря потребовалось 3289 цифр. Сколько страниц в словаре?

№ 113(А)

Дано:
ΔABC
$AC = BC$;
AD — медиана
$P_1 - P_2 = 2$ м, $AB = 8$ м.
Найти: AC и BC.

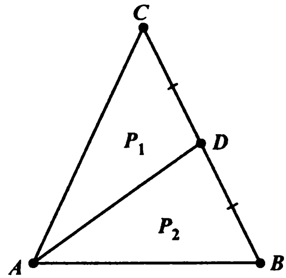


Рис. 18

№ 114

Торт имеет форму равнобедренной трапеции (рис. 19), у которой верхнее основание и боковые стороны в 2 раза меньше нижнего основания. Можно ли торт разделить на 4 равные части?

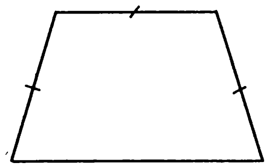


Рис. 19

№ 115

Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 дает соответственно остатки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

№ 116(А)

Когда сыну исполнилось 7 лет, его отцу было 37 лет. Сейчас отец в 4 раза старше сына. Сколько лет сыну?

№ 117

На координатной плоскости найти множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют условию $x(y-3)=0$.

№ 118(А)

Найти натуральные m и n, если $4m^2n - n - 4m^2 = 58$.

№ 119(А)

Доказать, что если $x + y = 2007z$ и $2007zu = y(z + u)$, где $z \neq 0$, $u \neq 0$, то верно равенство $\frac{x}{z} = \frac{y}{u}$.

№ 120(А)

Доказать, что если $a + b = 1$, то $\frac{a^2}{b^2-1} - \frac{b^2}{a^2-1} = \frac{2(b-a)}{ab+2}$.

№ 121

Разделить прямой угол на 3 равные части (рис. 20).

№ 122

Всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов.

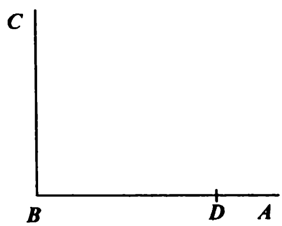


Рис. 20

№ 123

Один человек говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько у каждого?

№ 124

В классе 33 ученика, всем им вместе 430 лет. Доказать, что в классе найдутся 20 учеников, которым вместе не менее 260 лет.

№ 125

Один из углов равнобедренного треугольника равен 108°. Найти отношение длин двух биссектрис неравных углов.

№ 126

Известно, что $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 3$. Чему равно значение $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$?

№ 127(А)

Сколько стоит садовый участок треугольной формы, у которого длины сторон равны 158 м, 189 м и 347 м, если один квадратный метр стоит 10 долларов?

№ 128(А)

Решить уравнение: $19x + 15y = 1915$, где $x \in N$, $y \in N$.

№ 129(А)

Цифры a, b, c таковы, что $9c = 3a + b$. Доказать, что трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 7.

№ 130(А)

Доказать, что при любом $x \in R$
$x^{16} - x^{12} + x^8 - x + 1 > 0$.

№ 131

Внутри ΔABC взята точка K так, что $\angle ABK = 30°$, $\angle KAB = 10°$, $\angle ACB = 80°$ и $AC = BC$. Найти $\angle AKC$.

№ 132

В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если известно, что возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.

№ 133

В некотором году три месяца подряд содержали всего по 4 воскресенья. Доказать, что один из этих месяцев — февраль.

8 класс

№ 1

Для нумерации страниц словаря потребовалось всего 1734 цифры. Нумерация начиналась с единицы. Сколько всего страниц в словаре?

№ 2

Какое число больше $\sqrt{2005}+\sqrt{2007}$ или $2\sqrt{2006}$?

№ 3

Найти такое простое число p, что $p^2 + 9$ тоже простое.

№ 4

Может ли дискриминант квадратного уравнения быть равным 2007?

№ 5

Найти значение $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}$, если $x + y + z = 0$.

№ 6

Доказать, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$,
то $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$.

№ 7

Построить график функции $y=\frac{2|x-3|}{x-3}+1$.

№ 8

Арбуз весил 12 кг и содержал 99% воды. Когда он немного усох, то стал содержать 98% воды. Сколько теперь весит арбуз?

№ 9

Разложить многочлен $x^9 + x^8 + x^7 - x^3 + 1$ на множители.

№ 10

Доказать, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника — параллелограмм.

№ 11

Решить числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \times\; * * 5 \\ 1 * * \\ \hline 2 * * 5 \\ +\;1 3 * 0 \\ * * * \\ \hline 4 * 7 7 * \end{array}$$

№ 12(А)

Сумма двух натуральных чисел равна 2011. Если у одного из них зачеркнуть последнюю цифру, то получится второе число. Найти все такие числа.

№ 13(А)

Не находя x и y в отдельности, вычислить сумму $x^5y + xy^5$, если $x - y = 3$, $xy = 2$.

№ 14(А)

Решить уравнение $x^4 - (x - 1)(5x^2 - 4x + 4)=0$.

№ 15(А)

Найти целочисленный треугольник Пифагора, площадь которого численно равна периметру.

№ 16(А)

Найти дробь со знаменателем 13, которая больше $\frac{2}{17}$, но меньше $\frac{3}{17}$.

№ 17(А)

Найти наибольшее целое отрицательное значение x, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > 15$.

№ 18(А)

Доказать, что сумма $17^6 + 46^6$ делится на 37.

№ 19(А)

Простым или составным является число $20^{2007} + 1$?

№ 20(А)

На координатной плоскости Оху изобразить геометрическое место точек, заданное неравенством $|x + y| \leq 3$.

№ 21

Восстановить зашифрованные цифры $\overline{TP}^{\,И} = \overline{ИКС}$.

№ 22

В трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$, $AD > BC$) на диагонали AC взята точка E такая, что $BE \| CD$. Доказать, что $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DEC}$.

№ 23(А)

Решить в натуральных числах уравнение $x^3 - 27y^3 = 37$.

№ 24(А)

45 малышей в детском саду строят из кубиков двух цветов башни высотой 5 кубиков. Доказать, что среди этих башен есть хотя бы две одинаковые.

№ 25(А)

Какие две цифры можно приписать к числу 1313 справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 53?

№ 26(А)

Найти по крайней мере 19 решений уравнения $y^2 = x^2 + x^3$ в целых числах.

№ 27(А)

Разложить многочлен $x^9 + 5x^5 + x^4 + 4x + 4$ на множители с целыми коэффициентами.

№ 28(А)

Можно ли прямоугольник 24×11 разрезать на прямоугольники 5×8?

№ 29(А)

В меню кафе имеется 5 первых, 8 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

№ 30(А)

В трапеции $ABCD$ $(AD \| BC)$, $S_{\Delta ACD} = 32$ м^2, $S_{\Delta DCB} = 13$ м^2. Найти площадь трапеции $ABCD$.

№ 31(А)

Доказать, что $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ — число иррациональное.

№ 32(А)

Что больше 24^{17} или 126^{12}?

№ 33(А)

Три стороны трапеции равны по 10 дм, а острый угол равен 60°. Найти длину отрезка, соединяющего центр вписанной окружности с вершиной меньшего основания.

№ 34(А)

Доказать, что число $157^{5^{37}} - 1$ делится на 13.

№ 35(А)

Построить график функции $y = |x - 2|$.

№ 36(А)

Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $S_{\Delta AMD} = 33$ см^2, $CK = BK$.

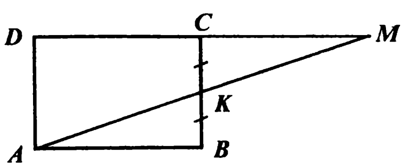


Рис. 21

№ 37(А)

Числа a и b нечетные. Каким будет число $a^2 + b + 1$?

№ 38(А)

На рисунке 22 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Указать знаки коэффициентов a, b и c.

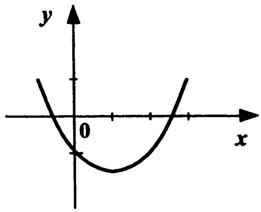


Рис. 22

№ 39(А)

Найти корни уравнения $\dfrac{x^3 - 8x^2 + 7x}{1 - x} = 0$.

№ 40(А)

Диагонали параллелограмма равны 16 м и 12 м, а угол между ними равен $30°$. Найдите площадь параллелограмма.

№ 41(А)

Доказать, что уравнение $\dfrac{3}{1 - |x|} = 1$ не имеет корней.

№ 42(А)

Найти длину промежутка, на котором выполняется неравенство $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \le 4$.

№ 43(А)

Доказать, что $1 + xy$ — квадрат рационального числа, если верно равенство $x^3 - y^3 = 2xy$.

№ 44(А)

Найти трехзначное число, если сумма его цифр равна 9 и оно равно $\dfrac{36}{47}$ числа, изображенного теми же цифрами, но написанными в обратном порядке.

№ 45(А)

Решить уравнение $(6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) - 3 = 0$.

№ 46(А)

Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 3x + m = 0$. При каком значении m разность корней данного уравнения будет равна 6?

№ 47(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}(x^3+1)(y^3+1)=18,\\ xy+x+y=5.\end{cases}$$

№ 48(А)

Среднее пропорциональное (геометрическое) двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из чисел. Найти эти числа.

№ 49(А)

Решить неравенство $\dfrac{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})}{(2x+1)(5x-7)} > 0$.

№ 50(А)

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-4}{x}<2,\\ x^2 \le 16.\end{cases}$$

№ 51(А)

В параллелограмме $ACBM$ $AC = 16$ м, $CB = 24$ м, CE и CF — соответственно высоты, проведенные к сторонам AM и BM, $\angle ECF = 60°$. Найти длину высоты CE.

№ 52(А)

Решить неравенство $|4x-3| \le |2x+3|$.

№ 53

По трем медианам m_a, m_b и m_c ΔABC, найти длину стороны $AC = b$.

№ 54

Основания трапеции a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

№ 55(А)

Существует ли четырехзначное число-квадрат, у которого сумма цифр равна числу, образованному первыми двумя цифрами, причем, первые два и последние два числа, также являются квадратами.

№ 56(А)

Сумма кубов цифр двузначного числа равна 35. Если от этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

№ 57(А)

Построить график уравнения $|x| + |y| = 2x$.

№ 58(А)

Построить график функции $y = (4 - x^2)^{\sqrt{-\frac{|x|}{4}}}$.

№ 59(А)

Решить уравнение $\sqrt{x^4 - 10x|x| + \frac{0,5}{0,02}} = 4$.

№ 60(А)

Решить неравенство $\sqrt{x^2 - \frac{6x^2}{|x|} + \frac{3}{tg^2 30°}} < \frac{1}{2}\sin^2 30°$.

№ 61(А)

Найти наименьшее натуральное число вида $n^3 + 3n^2 - 4$, делящееся на 19.

№ 62(А)

Найти длину средней линии прямоугольной трапеции, вписанной в окружность, если расстояния от центра окружности до концов большей боковой стороны равны соответственно 6 и 8 дм.

№ 63(А)

Построить график функции $y - |y| = x - |x|$.

№ 64(А)

Найти длину промежутка на котором выполняется неравенство $\sqrt{1-4x+4x^2} \le \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$.

№ 65

Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

№ 66(А)

Не решая уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, вычислить сумму кубов его корней.

№ 67(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{35}{216}. \end{cases}$$

№ 68(А)

Найти наибольшее значение n, при котором последовательность с общим членом $x_n = n^2 - n + 19$ является точным квадратом.

№ 69

Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, по сумме гипотенузы и опущенной на нее высоты.

№ 70(А)

Решить уравнение $x^4 + 12x + 3 = 0$.

№ 71(А)

Что больше 3^{3^3}, 33^3 или 3^{33}?

№ 72(А)

Разность между трехзначным числом и суммой его цифр есть полный квадрат. Найти все такие числа.

№ 73(А)

Представить в виде суммы двух квадратов $2x^2 - 5x + 6$.

№ 74(А)

x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax - 5a + 1 = 0$. Найти значение a, чтобы величина выражения $x_1^2 + x_2^2$ была наименьшей.

№ 75(А)

Сумма числа сторон выпуклого многоугольника и числа его диагоналей равна 21. Определить число сторон многоугольника.

№ 76(А)

Доказать неравенство $\frac{1}{4}(a + b + c + d) \geq \sqrt[4]{abcd}$.

№ 77(А)

Найти двузначное число, если сумма его цифр состоит из одинаковых чисел, а сумма квадратов его цифр, увеличенная на 10, равна самому числу.

№ 78(А)

Построить график функции $y = \frac{x^2 + 2|x| + 4}{|x^3| - 8}$.

№ 79(А)

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$ м. Определить катеты, если известно, что после того, как один из них увеличить на $133\frac{1}{13}\%$, а другой на $16\frac{2}{3}\%$, сумма их длин сделается равной 14 м.

№ 80(А)

Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{x^2-4}$.

№ 81(А)

Решить неравенство $|x+1| - |x-2| < 3$.

№ 82(А)

В тупоугольном равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 1, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Найти площадь треугольника.

№ 83(А)

Построить график функции $y = \dfrac{|x|}{x^2}$.

№ 84(А)

Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{x-3} - |x+1|$.

№ 85(А)

Найти функцию $f(x)$ такую, что при $x > 0$ выполняется равенство $f(x^2 + \sqrt{x}) = x^4 + (2x^2 - 1)\sqrt{x} - x^2 + x$.

№ 86(А)

При каких значениях a и b многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ обращается в точный квадрат?

№ 87(А)

Упростить выражение $\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{10}-4)^2}$.

№ 88(А)

Если сложить два целых числа, затем перемножить их, разделить большее на меньшее, вычесть из большего меньшее, а затем сложить все полученные числа, то получится 999. Найти эти числа.

№ 89(А)

Найти квадратный трехчлен, график которого симметричен относительно прямой $x = -1$ и проходит через точки $A(-2; 2)$ и $B(2; 26)$.

№ 90(А)

В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Вычислить площадь полученного треугольника.

№ 91(А)

Решить уравнение $x^3 + x + 3\sqrt{2} = 0$.

№ 92(А)

Доказать, что $p^2 - q^2$ делится на 24, где p и q — простые числа, большие 3.

№ 93(А)

Решить неравенство $\left|\dfrac{x^3-8}{x^2+2x+4}\right| > 0{,}4 \cdot 2\dfrac{1}{2} + 5|x|^0 - \dfrac{x^{2k+1}}{x^{2k}}$.

№ 94(А)

При каких значениях параметра a сумма кубов корней уравнения $x^2 + (6 - a - a^2)x - a^2 = 0$ равна нулю?

№ 95(А)

В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание в 2 раза больше высоты, опущенной на боковую сторону. Найти отношение R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

№ 96(А)

При каком наибольшем значении параметра a неравенство $\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}\geq -3$ выполняется для всех $x\in R$?

№ 97(А)

Решить уравнение $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$.

№ 98(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}49x^2+36y^2-14xy-266x-102y+501=0,\\ 7x^2-3y^2+11xy+73x-93y+135=0.\end{cases}$$

№ 99(А)

Решить в целых числах уравнение $x^4 = y^4 + 2y^2 + 157$.

№ 100(А)

Площадь равнобедренной трапеции равна 180 см^2. Найти длину верхнего основания, если боковые стороны равны по 13 см, а нижнее основание равно 20 см.

№ 101

Доказать, что разность между квадратом числа, не делящегося на 3, и единицей делится на 3.

№ 102(А)

При каких значениях x многочлен $(19x + 99)^2 + (19x + 15)^2$ принимает наименьшее значение?

№ 103

Разложить на множители $x^5 + x^3 + x$.

№ 104

Сократить дробь $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$.

№ 105

Упростить выражение $\sqrt{75-12\sqrt{21}}$.

№ 106

Извлечь квадратный корень из многочлена

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12.$$

№ 107(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7,\\ 3x+2y=23.\end{cases}$$

№ 108(А)

При каком значении параметра c один корень уравнения $x^2-10x+2c^3$ равен кубу другого?

№ 109(А)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений:

$$\begin{cases}2ax-3y=2a+3,\\ ax+(2a-1)y=a+5\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 110(А)

Найти углы прямоугольного треугольника, если известно, что $a^2+b^2=\frac{8}{\sqrt{3}}S$, где a и b — катеты, S — площадь.

№ 111(А)

Найти наименьшее значение функции $y=\frac{x(x-1)}{x(x-1)+3}$.

№ 112(А)

При каких значениях a и b многочлен x^3+13x^2+ax+b делится на $x^2+x+2007$?

№ 113(А)

Доказать, что выражение

$$\frac{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}+\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}{\sqrt{(9+\sqrt{77})^3}-\sqrt{(9-\sqrt{77})^3}}$$

представляет собой рациональную дробь.

№ 114(А)

Найти зависимость между a, b и c, если $a = \sqrt{x}+\sqrt{y}$, $b = x + y$, $c = x^2 + y^2$.

№ 115(А)

В равнобедренном ΔABC с основанием AB проведена биссектриса AD. Через точку D провели прямую, перпендикулярную AD и пересекающую AB в точке F. Найти радиус окружности, описанной около ΔADF, если $BD = a$.

№ 116(А)

Найти все двузначные числа, которые при делении на 7 дают в остатке 5, а при делении на 19 — остаток 9.

№ 117

Внутри угла в 60° дана точка M, удаленная от сторон угла на 2 и 11 единиц. Найти расстояние точки M от вершины угла.

№ 118(А)

Решить уравнение $x(7 - x)(7 + x^2) = 12(x + 1)^2$.

№ 119(А)

Решить неравенство $(3 - a)x^2 + (7a - 19)x + (44 - 19a) > 0$, если $a \in (1; 2)$.

№ 120

В ΔABC $\angle C = 120°$, CK — биссектриса. Доказать, что $\frac{1}{CK}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$.

№ 121

Найти длину шеста, сначала вертикально прислоненного к стене, затем смещенного так, что его верхний конец опустился на 3 дм, причем нижний конец отступил от стены на 9 дм.

№ 122

Найти число павлинов в стае, $\frac{1}{16}$ которой, умноженная на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат $\frac{1}{9}$ остатка вместе с 14 другими павлинами — на дереве тамала.

№ 123

Из точки M, взятой вне окружности, провести секущую так, чтобы она разделялась окружностью пополам.

№ 124(А)

Найти значения x и y в числе $12x3y4$, если оно кратно 599.

№ 125(А)

Верно ли, что число $2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 + 1$ является точным квадратом?

№ 126

Диагональ параллелограмма делит его угол в отношении 1:3. Найти углы параллелограмма, если длины сторон относятся как 1:2.

№ 127

Основания равнобедренной трапеции 11 см и 17 см. Как разрезать её на 4 равные трапеции?

№ 128(А)

Длины сторон треугольника связаны соотношением $a^3 + b^3 = c^3$. Определить вид треугольника.

№ 129(А)

Основания равнобедренной трапеции 1 и 8. Найти радиус окружности, которая проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, касается основания и боковых сторон трапеции.

№ 130(А)

При каких значениях a значение $(x_1 - 7x_2)(x_2 - 7x_1)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $x^2 - 3ax + a - \frac{1}{4}$, принимает наибольшее значение?

№ 131(А)

Разложить на множители многочлен

$$(1 + 4x^2)y^2 + 2(2x - y)(1 + 2xy) + 1.$$

№ 132(А)

Доказать, что если $a^2b^2 = a + b$, где $a > 0$, $b > 0$, то $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3 + a^2 + 1}{b^3 + b^2 + 1}$.

№ 133(А)

Доказать, что число $2^{5n+1} + 5^{n+2}$ делится на 27 при $n = 0, 1, 2, \ldots$

№ 134(А)

Почему на приведенном рисунке 23 изображена невозможная ситуация?

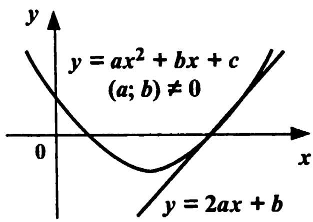


Рис. 23

№ 135(А)

Решить уравнение $4x^4 - 49x^2 - 4x + 14 = 0$.

№ 136(А)

Доказать, что выражение $48^n - 2 \cdot 6^n + 13^n$ кратно 7 при любом целом неотрицательном n.

№ 137(А)

Доказать, что если $x > y$ и $xy = 2\sqrt{2}$, то справедливо неравенство: $\dfrac{x^4 + y^4}{x^2 - y^2} \geq 8$.

№ 138(А)

Является ли число $\sqrt{52 - 14\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ рациональным?

№ 139(А)

Найти сумму:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2007}}.$$

№ 140

Найти наибольшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению:

$$3x^2 + y^2 + 2z^2 + xy + xz + yz = 7.$$

№ 141

В коробке находятся 30 черных и белых шаров. Определить, сколько белых и сколько черных шаров в коробке, если среди любых 12 шаров хотя бы 1 белый, а среди любых 20 шаров хотя бы 1 черный.

№ 142

Биссектрисы углов трапеции делят каждое из ее оснований на 3 равные части. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.

9 класс

№ 1

Сравнить 80^{13} и 10^{28}.

№ 2

Доказать, что если $x > 0$, то $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$.

№ 3

Доказать, что для любого натурального n найдется такое число a, что число $an + 4$ составное.

№ 4

В коробке лежат 2006 белых и 2007 красных шаров (шары перемешаны). Какое наименьшее число шаров нужно вынуть из коробки, не глядя, чтобы среди них обязательно нашелся 341 шар одного цвета?

№ 5

Можно ли разложить 1000 орехов в 7 корзин, расставленных по кругу, так, чтобы в любых двух соседних корзинах число орехов отличалось на 1?

№ 6

В выпуклом пятиугольнике $MNKPE$ углы MNK и KPE равны 90°, а каждая их сторон NK, KP и ME равна 1 и сумма длин сторон MN и PE равна 1. Доказать, что площадь $MNKPE$ равна 1.

№ 7

Доказать, что не существует целых чисел a, b, и c таких, что выражение $ax^2 + bx + c$ равно 2 при $x = 13$ и равно 3 при $x = 60$.

№ 8(А)

В ΔABC $\angle A = 60°$, $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Найти $\angle B$.

№ 9

Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 423. Определить номер дома, пятого от угла квартала.

№ 10

Разложить на множители выражение

$$a^3(b-c)+c^3(a-b)-b^3(a-c).$$

№ 11(А)

Решить уравнение $4x^2+\dfrac{10}{3x}=\dfrac{61}{9}$.

№ 12(А)

Найти пятизначное число вида $\overline{abccd}$, удовлетворяющее условиям:

$$2c+d=b^2,\ a+b=c^2,$$
$$10a+b=a+b+2c+d.$$

№ 13(А)

Доказать, что $333^{777}+777^{333}$ делится на 10.

№ 14(А)

В классе из 30 учащихся получили на контрольной оценки «5», «4», «3», «2». Сумма полученных оценок равна 90, причем; «троек» было больше, чем «пятерок» и «четверок». Кроме этого, известно, что число «четверок» кратно 5, а число «троек» кратно 7. Сколько и каких оценок получил класс?

№ 15

Стороны одного треугольника 17, 25 и 26 см, а две стороны другого — 17 и 25 см. Найти длину третьей стороны, если у треугольников равны радиусы вписанной окружностей.

№ 16(А)

В ΔABC стороны a, b, c ($a<b<c$) образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $R\cdot r=130$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Найти наименьшую целую тройку (a, b, c).

№ 17(А)

Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $(1+\frac{7}{\sin x})(1+\frac{19}{\cos x})>293$.

№ 18(А)

Заменить буквы цифрами так, чтобы равенство БЕСЫ = (Б + Е + С + Ы)^4 оказалось верным.

№ 19(А)

В 46 клетках находится 1000 кроликов. Доказать, что в каких-то двух клетках находится поровну кроликов (могут быть пустые клетки).

№ 20(А)

Доказать, что $35\sin^2 x \geq 6\sin 2x - 1$.

№ 21(А)

Решить уравнение $(1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2)$.

№ 22(А)

В трапеции $KLMT$ $LM||KT$, $KL = MT$, диагональ $MK = 8$ м и $\angle MKT = 75°$. Найти площадь трапеции.

№ 23(А)

Сумма нескольких последовательных четных чисел равна 100. Найти эти числа.

№ 24(А)

В ΔABC $BC = 14$ дм, BD — медиана, $\angle ABD = 45°$, $\angle CBD = 30°$. Найти AB и BD.

№ 25(А)

Сколько существует двузначных чисел, делящихся на произведение своих цифр?

№ 26(А)

Периметр ромба содержит $2p$ см, сумма его диагоналей m см. Найти площадь ромба.

№ 27(А)

Сумма цифр трехзначного числа равна 17. Если из исходного числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 792. Найти трехзначное число.

№ 28(А)

Стороны параллелограмма равны 11 м и 23 м, а диагонали относятся как 2:3. Найти длины диагоналей.

№ 29(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=65,\\(x-y)(x^2-y^2)=5.\end{cases}$$

№ 30(А)

Сумма десяти первых членов арифметической прогрессии равна 140, а произведение $a_2a_9 = 147$. Найти прогрессию, если она является возрастающей.

№ 31(А)

Найти расстояние между осью параболы $y = -x^2 - 7x + 2$ и осью Oy.

№ 32(А)

При каком значении m, график функции $y=2x^2-3x+17+m$ имеет одну общую точку с осью Ox?

№ 33(А)

О числах m, n, k и p известно, что $m > n$, $p > k$, $k = m$. Сравнить числа p и n.

№ 34

Цена товара со 100 тыс. руб. дважды понижалась, каждый раз на 30%. Какова окончательная цена товара?

№ 35(А)

Является ли число 74 членом арифметической прогрессии 4, 8, 12, 16, ...?

№ 36(А)

Упростить выражение $\dfrac{4\cdot 36^n}{2^{2n+2}\cdot 3^{2n-3}}$.

№ 37(А)

На рисунке 24 изображен график функции $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Найти координаты точек M, N и K.

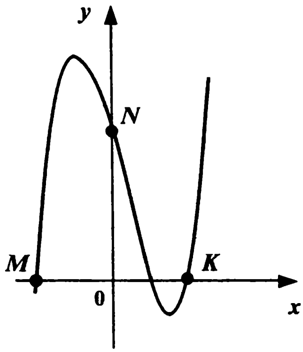


Рис. 24

№ 38(А)

Найти площадь заштрихованной фигуры.

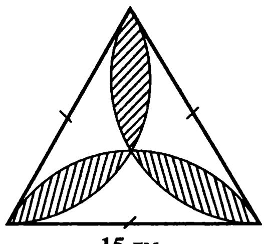


Рис. 25

№ 39(А)

При каких значениях a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$?

№ 40(А)

Является ли число $5\frac{3}{2}$ членом последовательности, заданной формулой $a_n = 2n - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$?

№ 41(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = 10, \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = 2{,}5. \end{cases}$$

№ 42(А)

Решить неравенство $\left|\dfrac{2x-5}{x+1}\right| \geq 1$.

№ 43(А)

Найти наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3} < 0.$$

№ 44

Вычислить без таблиц $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$.

№ 45(А)

Решить уравнение $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = \dfrac{1}{4}\sin 12x$.

№ 46(А)

Решить уравнение $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 117$.

№ 47(А)

Найти три числа, образующих возрастающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма этих чисел равна 26, а сумма их квадратов равна 364.

№ 48(А)

Доказать, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в 15° составляет восьмую часть квадрата гипотенузы.

№ 49 (А)

Найти четырехзначное число, которое в 9 раз меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

№ 50 (А)

Чему равно значение выражения $a^{2007} + \dfrac{1}{a^{2007}}$, если $a^2 + a + 1 = 0$?

№ 51 (А)

Построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 9}{|x-3|} + \dfrac{x^{2k-1}}{x^{k-1}} - x^k - 2x^0$.

№ 52 (А)

Решить уравнение

$\cos 2007° + \cos 27° + \operatorname{tg} 30° \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{|x|} = \sqrt{x^2} - 3\sin 30°$.

№ 53 (А)

Решить неравенство

$$\left|\frac{x^3+1}{x^2-x+1}\right| > |3x|^0 + 2{,}4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} - \frac{x^{n+2}}{x^n}.$$

№ 54 (А)

Решить уравнение

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} + 2\sqrt{(x-2)(x+6)} = 2(8-x).$$

№ 55 (А)

Найти наименьшее целое положительное число из области определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{x^2-4}$.

№ 56 (А)

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |x-2| \geq 3, \\ \left|\dfrac{x-1}{x}\right| < 1. \end{cases}$$

№ 57(А)

Решить неравенство $\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \geq 4$.

№ 58(А)

Решить уравнение $\sqrt{1-\cos x} = \sin x, \quad x \in [\pi; 3\pi]$.

№ 59(А)

При каком значении x последовательность

$$\sqrt{x-5}, \sqrt[4]{10x+4}, \sqrt{x+2}$$

образует геометрическую прогрессию?

№ 60(А)

Существует ли треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 13$?

№ 61(А)

Построить график функции $y = \frac{2|x|}{x}\sqrt{4-x}$.

№ 62(А)

Решить уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 3x} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

№ 63(А)

Решить неравенство $\frac{x^{0,4} \cdot x^{1\frac{3}{5}} + 4\operatorname{ctg}4°\operatorname{ctg}94°}{|x|-2} \geq x^2$.

№ 64(А)

Найти наименьшее 4-значное число, удовлетворяющее соотношению $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{ab} + \overline{cd}$.

№ 65(А)

Найти площадь треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, если известно, что произведение радиусов вписанной и описанной окружностей равно 130.

№ 66

Доказать, что площадь равнобедренной трапеции определяется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}m^2 \sin\alpha,$$

где m — длина диагонали, α — угол между ними.

№ 67(А)

Найти сумму целых чисел из области определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}$.

№ 68(А)

Решить неравенство $\dfrac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3} < 0$.

№ 69(А)

Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4$.

№ 70

Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой. Потом из бака вылили столько же литров смеси. После этого в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй, если вместимость бака 64 л?

№ 71(А)

Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 10, а в остатке некоторое число. Если же это число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, опять разделить на произведение его цифр, то в частном получится 2, а в остатке — то же число. Найти это двузначное число.

№ 72

Сколько можно провести различных прямых линий, соединяя попарно n точек на плоскости, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой?

№ 73(А)

Периметр прямоугольного треугольника равен 12 см. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

№ 74(А)

Решить уравнение $\cos x + \cos\frac{3x}{4} = 2$.

№ 75(А)

Решить неравенство $|x + 1| - |x - 2| < 3$.

№ 76(А)

При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + (a-1)y = a+3, \\ (a+2)x + 2ay = 6a+8. \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

№ 77(А)

Решить уравнение $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{7}{8}$.

№ 78(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 27, \\ x^2 + 4y^2 = 9. \end{cases}$$

№ 79(А)

Решить уравнение $4x = \left(\sqrt{x} + 39\right)\left(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}\right)^2$.

№ 80(А)

Решить уравнение $\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}\cos x-\dfrac{4}{3}\right)=1.$

№ 81(А)

При каких значениях параметров m и n многочлен $2x^5-x^4+x^2+mx+n$ делится без остатка на x^3+x+1?

№ 82(А)

На основании равнобедренного треугольника построен правильный треугольник, площадь которого в 3 раза больше площади данного. Найти углы треугольника.

№ 83(А)

Решить уравнение

$$\frac{1}{6x^2-5x+1}+\frac{1}{2x^2-3x+1}=3x^2-4x.$$

№ 84(А)

Решить уравнение $\sqrt{7}(y-2x)=x^2+y^2+\dfrac{35}{4}.$

№ 85(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x^3+y^3=xy+61,\\ x^2+y^2=xy+13.\end{cases}$$

№ 86(А)

Решить уравнение $x^2-4x\cos(xy)+4=0.$

№ 87(А)

При каком целом значении a уравнения $4x^2-(2a+1)x-2=0$ и $7x^2+(3a-1)x-44=0$ имеют общий корень?

№ 88(А)

Решить уравнение

$$\sin 2007^\circ\cdot\sin 540^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ\cdot\frac{x^0x^2}{3|x|}=x^2\cos 30^\circ.$$

№ 89(А)

В равнобедренной трапеции острый угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне равен α. При каком значении α диагональ трапеции в два раза больше высоты?

№ 90(А)

Доказать, что уравнение $x^5 - px^3 + 1 = 0$ при целом $p > 2$ не имеет рациональных корней.

№ 91(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33y, \\ 8(x+y) = 3x^3y^2. \end{cases}$$

№ 92(А)

Доказать, что при любом целом m выражение

$$\frac{m^3}{6} + \frac{3m^2}{2} + \frac{13m}{3} + 4$$

является целым числом.

№ 93(А)

Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найти R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

№ 94(А)

Доказать, что если $a^2b^2 = a + b$, где $a > 0$; $b > 0$, то $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3 + a^2 + 1}{b^3 + b^2 + 1}$.

№ 95(А)

Решить неравенство $7^n + 8^n < 9^n$, где $n \in N$.

№ 96(А)

Представить многочлен $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$ в виде произведения четырех многочленов не ниже первой степени.

№ 97(А)

Известно, что в ΔABC $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2 см больше стороны AB, а $AC = 5$ см. Найти AB и BC.

№ 98(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 0, \\ 2x - y + \dfrac{5}{8} = 2z. \end{cases}$$

№ 99(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{4y} + \dfrac{5}{12z}\right)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{5z}{12}\right) = 1, \\ 3x + 2y^2 + z^3 = 22. \end{cases}$$

№ 100(А)

Доказать, что выражение $\dfrac{1\cdot4\cdot6 + 2\cdot8\cdot12 + 3\cdot12\cdot18 + \ldots}{1\cdot2\cdot3 + 2\cdot4\cdot6 + 3\cdot6\cdot9 + \ldots}$ является целым числом — квадратом.

№ 101(А)

В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AD = 8$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 120°$. Найти сторону CD.

№ 102(А)

При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 56x - 64 = 0$ составляют геометрическую прогрессию?

№ 103(А)

Решить уравнение

$$\cos 2007^\circ \cdot \sin 360^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ \cdot \frac{x^0 \cdot x^3}{|x|} = 6x \sin 30^\circ.$$

№ 104(А)

Определить числа a и b так, чтобы многочлен $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ делился без остатка на многочлен $g(x) = x^2 - x + b$.

№ 105(А)

Доказать, что $\operatorname{tg} 127^\circ 30' + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ есть целое число.

№ 106

В равнобедренную трапецию вписан круг. Определить радиус этого круга, если боковая сторона делится точкой касания на отрезки длиной m и n.

№ 107

Разложить на множители $(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3$.

№ 108

Сократить дробь $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$.

№ 109

Освободиться от корня в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[4]{11} - \sqrt[4]{8}}$.

№ 110(А)

Решить уравнение $x^9 - 2007x^3 + \sqrt{2006} = 0$.

№ 111(А)

Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{7x+2}{x+2}} - \dfrac{12}{7(7x+2)} = \dfrac{53}{28}$.

№ 112

Доказать, что если a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, то $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

№ 113(А)

Решить уравнение $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4x - 8y + 10 = 0$.

№ 114(А)

Решить уравнение $x^2 + 19x - x! = 0$.

№ 115(А)

Решить уравнение $x^5 + \frac{1}{x^5} = \frac{205}{16}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

№ 116(А)

Имеет ли решения в натуральных числах уравнение $x^2 + y^7 = z^2$?

№ 117(А)

Решить неравенство

$$\operatorname{tg}5\operatorname{ctg}(\pi-5) + x\sin30^\circ + \sqrt{(x-3)^2} < 1.$$

№ 118(А)

Показать, что многочлен $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ есть квадрат трехчлена.

№ 119(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x(x+1)(2x^2-3y^2)=12, \\ 2x+4x^2-3y^2=14. \end{cases}$$

№ 120(А)

Два угла треугольника, прилежащих к одной стороне, равны 45° и 60°. Найти отношение R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

№ 121

Упростить выражение $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$.

№ 122

Доказать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $q_1, q_2, q_3, \ldots$, то $\frac{S}{S-q_1}=\frac{q_1}{q_2}$.

№ 123

Может ли число $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ оканчиваться цифрой 9?

№ 124

Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

№ 125

Цифры трехзначного числа образуют арифметическую прогрессию. Если к нему прибавить 101, то получится число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Найти трехзначное число.

№ 126(А)

Высота CD, стороны AC, AB и CB ΔABC составляют арифметическую прогрессию с разностью d. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что высота CD опущена на сторону AB.

№ 127(А)

При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x^2 - 4ax + 45$ на $[-3; +\infty]$ равно 9?

№ 128(А)

Делится ли число $10^n + 6^n - 3^n - 1$ на 63 при $n \in N$?

№ 129(А)

Решить в целых числах уравнение $xy^2 - 7(x + y^2) = 1$.

№ 130(А)

Доказать, что выражение $9 \cdot 3^{3n+1} - 8^{n+1}$ кратно 19 при любом целом неотрицательном n.

№ 131(А)

Доказать, что для любых чисел $a \neq 0$; $b \neq 0$ выполняется неравенство $a^6 + b^6 \leq \frac{a^9}{b^3} + \frac{b^9}{a^3}$.

№ 132

Доказать тождество $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}$.

№ 133(А)

Доказать, что $13! - 11!$ кратно 31.

№ 134

Доказать, что если корни уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ составляют арифметическую прогрессию, то один из корней равен $-\frac{b}{3a}$.

№ 135

В ΔABC $\angle C = 120°$, $BC = a$, $AC = b$. Найти длину биссектрисы CD.

№ 136

Медианы ΔABC пересекаются в точке O. Доказать, что $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$.

№ 137

Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right) = 0$. Доказать, что $f(-1) \cdot f(1) = 0$.

10 класс

№ 1

Каким должно быть число m, чтобы уравнения $x^3 + mx + 1 = 0$ и $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ имели общий корень?

№ 2 (А)

Натуральные числа от 1 выписаны подряд. Какая цифра стоит на 2007 месте?

№ 3 (А)

Доказать, что число $4^7 + 7^{16}$ — составное.

№ 4 (А)

Решить уравнение $(\sqrt[4]{125} - \sqrt[4]{0{,}2}\,)^x = 51{,}2$, где $x \in Z$.

№ 5 (А)

Разложить на множители выражение, не группируя члены $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$.

№ 6 (А)

Доказать, что если ab и $a + b$ делится на c, то $a^6 + b^6$ делится на c^3.

№ 7

На дуге BC окружности, описанной около равностороннего ΔABC, взята произвольная точка M. Отрезки AM и BC пересекаются в точке K. Доказать, что $\dfrac{1}{MK} = \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$.

№ 8 (А)

Доказать, что если $7a + 13b = 47$, то верно неравенство $20(7a^2 + 13b^2) \geq 47^2$.

№ 9 (А)

Доказать неравенство $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2006}{2007} < \dfrac{1}{44}$.

№ 10(А)

Существует ли треугольник, стороны и высота которого связаны соотношением $a > b > c > h$ и выражаются последовательными целыми числами, если высота h опущена на сторону b?

№ 11(А)

Решить уравнение $(\sqrt{12})^{2x} + 5^x = 13^x$.

№ 12(А)

Найти все натуральные числа m, при которых дробь $\frac{13m-1}{3m+5}$ равна целому числу.

№ 13(А)

Решить уравнение $\cos x + \cos 7x = 2$.

№ 14(А)

В ΔABC длины сторон образуют арифметическую прогрессию, причем, $BC < AC < AB$. Известно, что $r/R = \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})$. Найти величину $\angle B$.

№ 15(А)

Решить в натуральных числах уравнение

$$193\,(x^3y^3 + x^2 + y^2) = 1753\,(xy^3 + 1).$$

№ 16(А)

В четырехзначном числе первая цифра совпадает с третьей, а вторая — с четвертой. Доказать, что это число кратно 101.

№ 17(А)

Что больше 100^{100} или 101^{99}?

№ 18

Может ли сумма нескольких последовательных целых чисел равняться 100?

№ 19(А)

Найти все пятизначные числа, обладающие тем свойством, что если приписать впереди этого числа некоторое однозначное число, а затем приписать в конце этого числа то же однозначное число, то отношение полученного большего числа к меньшему будет равно 3.

№ 20(А)

В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания.

№ 21(А)

Не решая уравнения $4x^2 - \sqrt{85}x + 5\frac{1}{4} = 0$, вычислить разность кубов его корней.

№ 22(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{5} = \dfrac{x+z}{6} = \dfrac{y+z}{7}, \\ (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = 110. \end{cases}$$

№ 23(А)

Найти натуральные числа, удовлетворяющие равенству $\overline{abc}(a+\overline{bc}) = a^3 + \overline{bc}^3$, где a, b, c — различные числа.

№ 24(А)

Решить уравнение $(x^2 + x)^2 + |x^2 + x| - 2 = 0$.

№ 25(А)

Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^3+1}}.$$

№ 26(А)

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{3-x} < 2, \\ x^3 < 16x, \\ 4 \geq x^2. \end{cases}$$

№ 27(А)

Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Доказать, что построенное сечение — трапеция.

№ 28(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$$

№ 29(А)

Трехзначное число оканчивается цифрой 5. Если эту цифру переставить на I место и найти разность между исходным и полученным числом, то получится трехзначное число с одинаковыми цифрами. Найти это число.

№ 30(А)

Решить уравнение $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 2$.

№ 31(А)

Делится ли $13^{13} + 13^{14} + 13^{15}$ на 61?

№ 32(А)

Доказать, что на графике функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ есть точка, которая является центром симметрии графика.

№ 33(А)

Найти площадь равнобедренной трапеции, у которой длина диагонали равна 8 дм, а угол между диагоналями — 45°.

№ 34(А)

Решить уравнение $16x^2 + 9x + 117 = 24x\sqrt{x+13}$.

№ 35(А)

Решить уравнение $|x - 4| + |x - 3| = x - 7$.

№ 36(А)

Произведение числа 13 на некоторое четырехзначное число есть точный куб. Найти неизвестный множитель.

№ 37(А)

Не решая уравнения $x^2 - \sqrt{13}x + 3 = 0$ найти значение $x_1^5 - x_2^5$, где x_1 и x_2 — корни уравнения.

№ 38(А)

Какие натуральные числа увеличиваются в 7 раз, если между цифрами единиц и десятков вставить нуль.

№ 39(А)

Около круга описан прямоугольный треугольник с острым углом 60° и прилежащим катетом длиной 6 дм. Найти площадь круга.

№ 40(А)

Найти трехзначные числа, кратные 13, у которых сумма цифр также кратна 13.

№ 41(А)

В ΔABC длины сторон a, b, c и площадь S связаны соотношением $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$. Найти $\angle A$.

№ 42(А)

Решить уравнение $x = 2\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{x^3 - 3x^2}$.

№ 43(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2 y + y^2 x = 20. \end{cases}$$

№ 44(А)

Решить уравнение $|x^3 - 2x| = 2x + 15$.

№ 45(А)

Решить неравенство $\dfrac{2x^2 - 5x - 2}{3x - x^2 - 7} \le 1$.

№ 46(А)

Решить совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x^3 \ge 100x, \\ \dfrac{(x+9)(7x - x^2 - 13)}{x^2 - 18x + 45} \ge 0. \end{array}\right.$$

№ 47(А)

В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 12, а сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна $\dfrac{83}{8}$. Найти стороны треугольника.

№ 48(А)

Решить уравнение $\sin\dfrac{5x}{4} + \cos x = 2$.

№ 49(А)

Доказать, что если $7\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$, то

$$3\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4\operatorname{tg}\alpha.$$

№ 50(А)

Решить уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

№ 51(А)

Построить график функции $y=(\cos x)^0\sqrt{1-\sin^2 x}$.

№ 52(А)

Решить уравнение $\cos\left(\pi\sqrt{x^2-4x-5}\right)=\dfrac{1-x^3}{x^2+x+1}+x$.

№ 53(А)

Решить неравенство

$$\frac{x^7\operatorname{tg}189°\sin 180°}{\operatorname{tg}9°}+\operatorname{ctg}45°+\sqrt{x^2-4x+4}\geq 5.$$

№ 54(А)

Найти катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна c, а биссектриса одного из острых углов равна $\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

№ 55(А)

Сравнить $\sin 9$ и $\sin 10$.

№ 56(А)

Решить уравнение $37\operatorname{tg}3x=11\operatorname{tg}x$.

№ 57(А)

Найти область определения функции $y=\sqrt{1-2\sin x}$.

№ 58(А)

Найти множество значений функции $y=\dfrac{1}{2}(1+4\cos^2 x)$.

№ 59

Доказать, если a и b — катеты, c — гипотенуза, то $r=\dfrac{1}{2}(a+b-c)$, где r — радиус вписанной окружности.

№ 60(А)

Если сложить два двузначных числа, разделить большее на меньшее, вычесть из большего меньшее, а затем полученные числа сложить, то получится 111. Найти эти числа.

№ 61(А)

В параллелограмме $ABCD$ луч, проведенный из вершины A, делит сторону BC в отношении 3:5 ($BC > AB$). В каком отношении луч делит диагональ BD?

№ 62(А)

Найти $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

№ 63(А)

Решить неравенство $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.

№ 64(А)

Найти все трехзначные числа, которые в 3 раза больше суммы всех возможных двузначных чисел, составленных из них без перестановок.

№ 65(А)

Построить график функции

$$y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+tg^2 x} \cdot \sqrt{x^2-4x+4}.$$

№ 66(А)

Решить уравнение $\frac{x^2}{|x|}(4-x) + (1-|x|)(1+|x|) = 3$.

№ 67(А)

Решить неравенство

$$\sqrt{9x^2-6x+x^0} > \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}.$$

№ 68(А)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+3x^2=1, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№ 69(А)

Решить уравнение $\sqrt[3]{\dfrac{x+56}{x}}+4\sqrt[3]{\dfrac{x+19}{x}}=8.$

№ 70(А)

Найти наименьшую пару чисел $x, y \in N$, таких, что выполняется равенство $x^2+y^2+xy=\overline{aaa}^2$.

№ 71(А)

Найти все трехзначные числа, которые при делении на 11 дают полный квадрат.

№ 72

Доказать неравенство $3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2$.

№ 73(А)

Найти число, при делении на которое три числа 200513, 200631 и 200749 давали бы один и тот же остаток.

№ 74(А)

Найти четырехзначное число, у которого сумма двух первых и двух последних цифр равна 13, а сумма квадратов двух последних цифр равна двузначному числу, образованному первыми двумя цифрами искомого числа.

№ 75(А)

Стороны треугольника $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см. Две из них (a и b) служат касательными к кругу, центр которого лежит на третьей стороне. Определить радиус круга.

№ 76(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y,\\ \sqrt{2}\sin x = \sin y.\end{cases}$$

№ 77(А)

Решить уравнение $2|x|\ln x + \dfrac{x^2-4}{|x|+2} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{4\pi}{3}}$.

№ 78(А)

Решить неравенство $3^{2|x|-x} \le \operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

№ 79(А)

При каком значении параметра a существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $2(x + y + z) = 4x^2 + y^2$ и $x + 2y + 3z = a$?

№ 80(А)

В квадрате $KCNM$ на серединах сторон KM и MN отмечены точки A и B, которые соединены с вершиной C. Найти $\angle ACB$.

№ 81

Доказать, что площадь прямоугольного треугольника можно найти по формуле $S = (2R + r) \cdot r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

№ 82(А)

Решить уравнение $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12x}$.

№ 83

Найти цифры x, y, z, если $\sqrt{\overline{xyz}} = x + y^2 + z^3$.

№ 84(А)

Решить уравнение $x - x^2 - 2x^3 = \frac{1}{3}$.

№ 85(А)

Решить систему уравнений в целых числах:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

№ 86(А)

Решить уравнение

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 3} \cdot \operatorname{arctg}(2x+1) + \sqrt{x^2 - 4x + 6} \cdot \operatorname{arctg}(2-x) = 0 \cdot$$

№ 87(А)

Найти функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} f(3x-2) + 7g(x-5)x + 1, \\ f(x+2) - g\left(\frac{x}{3} - 4\right) = 3x. \end{cases}$$

№ 88(А)

В прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см. Найти отношение R/r, если $S_{\Delta ABC} = 144$ см^2.

№ 89(А)

Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах CC_1, AD и BB_1.

№ 90(А)

Решить уравнение $50505^x + 121212^x = 131313^x$.

№ 91

Решить в натуральных числах уравнение

$$\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2 \cdot$$

№ 92(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = xy + y^2, \\ 4y = x^2 + 2x. \end{cases}$$

№ 93(А)

Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 2007. Может ли длина радиуса вписанной окружности быть равной 1000?

№ 94(А)

Доказать, что число вида

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 35) + 36$$

есть точный квадрат.

№ 95(А)

Доказать, что если $\sin x + \cos x = 1$, то $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$.

№ 96(А)

Расположить многочлен $x^3 + x^2 + x + 2007$ по степеням $x + 7$.

№ 97(А)

Решить уравнение $2x^7 + x^{28} = 3x^{21}$.

№ 98(А)

Представить многочлен $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$ в виде произведения четырех многочленов не ниже первой.

№ 99(А)

Известно, что числа x и y удовлетворяют условию

$$\frac{x}{2y} + \frac{9y}{2x} + \frac{18xy}{x^2 + 9y^2} = 6.$$

Найти наименьшее значение выражения $(x - 7)^2 + 3xy$.

№ 100(А)

Углы треугольника относятся как 1:5:6. Длина наименьшей стороны равна 2. Найти радиус вписанной окружности.

№ 101(А)

Решить неравенство $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1$.

№ 102(А)

Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $29^n + 19^n + 15^n - 2^n(1 + 2^{3n} + 3^n)$ делится на 13.

№ 103(А)

Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$.

№ 104(А)

Решить уравнение $\frac{x(4x^2+3)}{(2x+1)^3} = 7$.

№ 105(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 9(x-y)^3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

№ 106(А)

Решить уравнение $(3x + 1)^2 = 8\sqrt{x}(3x - 2\sqrt{x}) + 1$.

№ 107(А)

Решить уравнение $\log_3(x+1)^2 + \log_3|x+1| = 6$.

№ 108(А)

Решить уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

№ 109(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{24}, \\ y^{x+y} = x^{6}. \end{cases}$$

№ 110

Решить уравнение $\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = 1$.

№ 111

Доказать, что во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

№ 112

Доказать, что если p и $2p + 1$ — числа простые и $p \geq 5$, то $4p + 1$ — число составное.

№ 113(А)

Показать, что ни при каком целом значении x дроби $\frac{x^2 - 3x + 4}{49}$; $\frac{x^2 + 5x - 9}{169}$; $\frac{x^2 + 3x + 15}{121}$ не могут быть равны целым числам.

№ 114

Разложить на множители $(x + y)^7 - x^7 - y^7$.

№ 115

Сократить дробь $\frac{x^8 + x^4 + 1}{x^2 + x + 1}$.

№ 116

Упростить выражение $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}} + 3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 5\sqrt[3]{144}$.

№ 117

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$.

№ 118

В уравнении $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$ освободиться от радикала.

№ 119

Доказать, что $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \le \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

№ 120(А)

Найти сумму $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)^2$.

№ 121

Доказать, что если n — целое число, то n^5-n делится на 5.

№ 122

Четырехзначное число делится на 7 и 19. После умножения его на 29 и деления на 41 получился остаток 39. Найти четырехзначное число.

№ 123(А)

Чему равен n-й член ряда

$$-13+17-13+17-13+17-\ldots?$$

№ 124

Доказать, что если для углов A, B, C некоторого треугольника выполняется соотношение $\operatorname{tg}(A-B)+\operatorname{tg}(B-C)+\operatorname{tg}(C-A)=0$, то треугольник равнобедренный.

№ 125(А)

Решить уравнение $x^2(x+1)^2-3x(x^2-1)=4(x-1)^2$.

№ 126(А)

Доказать, что если $\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-1}\right)\left(y\sqrt{y}+\sqrt{y^3-1}\right)=1$, то $\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y^3-1}=0$.

№ 127

Доказать, что $\mathrm{tg}15°\cdot\mathrm{tg}25°\cdot\mathrm{tg}35°\cdot\mathrm{tg}85°=1$.

№ 128

Сколько существует пятизначных чисел, заканчивающихся цифрой 6, которые делятся на 3?

№ 129

Доказать, что если натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=c^2$, то по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3.

№ 130

Решить уравнение $8^x\cdot(3x+1)=6$.

11 класс

№ 1 (А)

Решить уравнение

$$\frac{1}{(x+2003)(x+2004)}+\frac{1}{(x+2004)(x+2005)}+$$
$$+\frac{1}{(x+2005)(x+2006)}+\frac{1}{(x+2006)(x+2007)}=\frac{1}{999999}.$$

№ 2 (А)

Не пользуясь таблицами логарифмов, доказать неравенство $\frac{1}{\log_7 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>3$.

№ 3 (А)

По двум сторонам треугольника a и b найти радиус описанной окружности, если известно, что угол, лежащий против третьей стороны в 2 раза больше угла, лежащего против стороны b.

№ 4

Доказать, что при $n \in Z$ и $n \geq 0$ выражение $7^{n+2}+8^{2n+1}$ кратно 57.

№ 5

Найти все простые числа p такие, что $p+10$ и $p+14$ также являются простыми числами.

№ 6 (А)

Доказать, что выражение $(x^2-xy+y^2)^7+(x^2+xy+y^2)^7$ делится без остатка на $2x^2+2y^2$.

№ 7 (А)

Пусть $f(\cos x)=\cos 13x$. Доказать, что $f(\sin x)=\sin 13x$.

№ 8 (А)

Известно, что отрезки с длинами a, b, c образуют треугольник. Доказать, что отрезки с длинами $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$ также образуют треугольник.

№ 9(А)

Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 = 2005^{2007}$ разрешимо в натуральных числах.

№ 10(А)

Решить уравнение $27^x - 8^x = 3(18^x - 12^x)$.

№ 11(А)

Решить уравнение $2\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{x^2+1}{x}$.

№ 12(А)

Что больше $(1{,}001)^{1000}$ или 2?

№ 13(А)

Делится ли число $10^n + 6^n - 3^n - 1$, $n \in N$, на 63?

№ 14(А)

Решить уравнение $\sin x + \sin^7 x - \sin 7x = 3$.

№ 15(А)

Решить уравнение $x^4 + 26x^2 - x + 182 = 0$.

№ 16(А)

Построить график функции

$$y = (\log_{2007} x^{2007})^0 \cdot \frac{|x^3|+8}{x^2-2x+4}.$$

№ 17(А)

Решить уравнение $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = \sin x + \sqrt{x-3}$.

№ 18(А)

Решить неравенство $\frac{x}{|x|} \le \sqrt{9-x^2}$.

№ 19(А)

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $5f(x) = 3f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}$, где $x > 0$.

№ 20(А)

Доказать, что если $7\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$, то $3\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 4\operatorname{tg}\alpha$.

№ 21(А)

Сравнить $\frac{1}{2007}$ и $\ln\frac{2007}{2006}$.

№ 22(А)

В конус вписан шар. Радиус окружности, которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между его высотой и образующей равен α.

№ 23(А)

В шестизначном числе первая цифра 2. Если ее перенести в конец, не изменяя порядка остальных цифр, то полученное число будет втрое больше исходного. Найти исходное число.

№ 24(А)

Решить неравенство $|x^2-1|+|x^2-9|<8$.

№ 25(А)

Вычислить $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

№ 26(А)

Решить уравнение $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$.

№ 27(А)

Найти значение $\sin 18°$ и $\cos 18°$, не пользуясь таблицами.

№ 28(А)

Найти множество значений функции

$$y = \frac{10}{\pi}\arccos(0{,}5(\cos x - \sin x)).$$

№ 29(А)

В правильной пирамиде $MABCD$ MO — высота пирамиды. Объем пирамиды равен $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Найти наименьшую площадь боковой поверхности пирамиды.

№ 30(А)

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi}(\sin^4 x - \cos^4 x)dx$.

№ 31(А)

Найти целое число, которое обращается в квадрат, как при увеличении его на 307, так и после уменьшения на 192.

№ 32(А)

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 2|x| > 1, \\ |x-3| < 5. \end{cases}$$

№ 33(А)

Найти целые решения неравенства $\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \ge 4$.

№ 34(А)

Вычислить $\log_3 18$, если $\log_3 12 = a$.

№ 35(А)

Решить уравнение $(6-\sqrt{35})^x + (6+\sqrt{35})^x = 142$.

№ 36(А)

Решить уравнение $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$.

№ 37(А)

Сколько существует четырехзначных чисел — квадратов, у которых одинаковы две первые и две последние цифры.

№ 38(А)

Трехзначное число $\overline{abc}$ является квадратом. Найти все такие числа, если $\overline{abc} = \overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ac}$.

№ 39(А)

Доказать, что если $\cos\alpha + \cos\beta = a$ и $\sin\alpha + \sin\beta = b$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

№ 40(А)

Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

№ 41(А)

Доказать, что если $x = \operatorname{tg}10°$, $y = \operatorname{tg}25°$, $z = \operatorname{tg}55°$, то $xy + yz + xz = 1$.

№ 42(А)

Решить уравнение $2(\sin 2x + \cos 2x) + \sin 4x + 1 = 0$.

№ 43(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

№ 44(А)

Найти область определения функции $y = \sqrt{\lg \sin x}$.

№ 45(А)

Найти сумму целых значений x из области определения функции $y = \frac{\log_2 x}{\arcsin(x-5)}$.

№ 46(А)

Найти множество значений функции $y=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{\dfrac{9-x^2}{1+x^2}}$.

№ 47(А)

Вычислить $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$.

№ 48(А)

Найти координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $y=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ имеют угловой коэффициент, равный 4.

№ 49(А)

При каких значениях a прямая $y=ax-5$ касается кривой $y=3x^2-4x-2$?

№ 50(А)

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2\cos x+x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

№ 51(А)

Вычислить интеграл $\int\limits_4^5\dfrac{x^2-6x+10}{x-3}dx$.

№ 52(А)

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=|x-6|$.

№ 53(А)

При каких значениях x бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q=x^2+x+1$ имеют сумму?

№ 54(А)

Стороны ΔABC равны соответственно $AC = a$, $BC = b$, а медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей стороны AB.

№ 55(А)

Точка K — середина стороны AD — прямоугольника $ABCD$. Найти угол между BK и диагональю AC, если известно, что $AD : AB = \sqrt{2}$.

№ 56(А)

Решить уравнение $xy - x = y^5 + y^3 - 7$, где $x \in N$, $y \in N$.

№ 57(А)

Найти наименьшую пару натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $2006x - 2005y = 2007$.

№ 58(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ xy(x^2 + y^2) = 30. \end{cases}$$

№ 59(А)

Решить уравнение $\log_2(x - 3) = 3\log_3^3(14 - x)$.

№ 60(А)

Решить уравнение

$$16\sin^3 x = 14 + \sqrt[3]{\sin x + 7}.$$

№ 61(А)

Построить график функции

$$y = 2\left(\ln\sqrt{\frac{x^2 - 4}{x + 2}}\right)' \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 4}.$$

№ 62(А)

Решить уравнение

$$\log_9 x^2 + 9^{\log_3\sqrt{2}} = \log_{2007}\mathrm{ctg}x + \log_{2007}\mathrm{tg}(\pi + x).$$

№ 63(А)

Решить неравенство $\arcsin(\log_3 x) < \mathrm{arctg}1$.

№ 64(А)

При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} 2x + by = c(ac+1), \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 65(А)

Упростить выражение $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2006}{2007!}$.

№ 66(А)

Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на части a и b $(a > b)$, разность длин которых равна меньшему катету и длине отрезка, соединяющего вершину прямого угла с этой точкой. Доказать, что $\frac{a}{b} > 2$.

№ 67(А)

Найти трехзначные числа, кратные 13, у которых сумма цифр также кратна 13.

№ 68(А)

Решить уравнение $\sin 9x + 2\cos 6x = 2$.

№ 69(А)

Вычислить без таблиц

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

№ 70(А)

Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 м^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.

№ 71(А)

Вычислить $\log_{12}60$, если $\log_6 30 = a$, $\log_{15}24 = b$.

№ 72(А)

Решить уравнение $16^{\frac{x-1}{x}} \cdot 5^x = 100$.

№ 73(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[y]{9^{1-y}}. \end{cases}$$

№ 74(А)

Решить неравенство $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \ge (x^2 + x + 1)^3$.

№ 75(А)

Доказать, что $\operatorname{tg}^2 72° \cdot \operatorname{ctg}^2 54° = 5$.

№ 76

Вычислить интеграл $\int\limits_0^8 x^2 \sqrt{x+1}\,dx$.

№ 77(А)

В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а разность двух неравных высот равна отношению периметра к боковой стороне. Найти длину боковой стороны.

№ 78(А)

При каких x и y число $70x0y07$ делится нацело на 19?

№ 79(А)

Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо неравенство $c \geq (3\sqrt{3}-1)\ r$, где c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности.

№ 80(А)

Найти цифры x, y, z, если $\sqrt{\overline{xyz}} = x + y^2 + z^3$.

№ 81(А)

Построить график функции $y = \cos x \cdot \dfrac{1}{(\sin x)'} - 2(\ln x)'$.

№ 82(А)

Решить уравнение $(\cos 2x)' = -\dfrac{2}{\pi}(\arcsin x + \arccos x)$.

№ 83(А)

Решить неравенство $\sin^2 2007° + \cos^2 207° \geq 2\sin\dfrac{x}{2}$.

№ 84

Доказать, что $\log_2 3 + \log_3 4 + \ldots + \log_7 8 < 7$.

№ 85(А)

Исключив x и y из равенств $x - y = a$, $x^3 - y^3 = b$, $x^5 - y^5 = c$, найти зависимость между a, b и c.

№ 86(А)

Известно, что $\cos\alpha + \sin\beta = a$ и $\sin\alpha + \cos\beta = b$, где $a^2 + b^2 \neq 0$. Выразить $\sin(\alpha - \beta)$ через a и b.

№ 87(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3y - xy^3 = 24, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

№ 88(А)

Решить уравнение $2x + \frac{4}{x}(2x-7)^3 = \sqrt{x} + 7$.

№ 89(А)

В равнобедренном треугольнике с острым углом при вершине, угол при основании равен 2α. Найти отношение r/R, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

№ 90(А)

Доказать, что для корней трехчлена $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$, где $p \in R$, выполняется неравенство $x_1^6 + x_2^6 > 11$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

№ 91(А)

Решить уравнение

$$x\sqrt{2(5-8x^2)} + 240\sqrt{1+x^2} = \sqrt{26(x^2+225)}.$$

№ 92(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 10(y-x) = x^4 + 9, \\ \sqrt{y} + \sqrt{y-2x} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

№ 93(А)

Решить уравнение $\log_3(8 + 2x - x^2) = \mathrm{tg}^2\frac{3\pi x}{4} + \mathrm{ctg}^2\frac{3\pi x}{4}$.

№ 94(А)

Решить уравнение $7\mathrm{tg}^3x - 6 = \sqrt[3]{\frac{1}{7}(tgx+6)}$.

№ 95(А)

Решить неравенство

$$5^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)} \le \frac{\cos^4 x}{16} + \frac{\sin^2 x}{8} - \frac{\sin^4 x}{16}.$$

№ 96(А)

Число $\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{19}$ является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Найти такой многочлен.

№ 97(А)

Прямоугольный треугольник с катетами a и b ($a > b$) вписан в окружность. Биссектриса острого угла соединена с точкой, взятой на большем катете. Через эту точку проведена хорда так, что она делится точками пересечения на три равные части. Найти длину хорды.

№ 98(А)

Найти хотя бы одну тройку (x; y; z) целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^{13}$.

№ 99(А)

Объем правильной треугольной усеченной пирамиды в 3 раза больше объема вписанного в нее шара. Найти угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью ее основания.

№ 100

Точка, взятая внутри правильного треугольника, удалена от его вершин на расстояния в 3; 4 и 5 см. Найти сторону треугольника.

№ 101(А)

Решить в целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x+zy^2=31, \\ z+xy^2=34. \end{cases}$$

№ 102(А)

Решить уравнение $x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0$.

№ 103(А)

Доказать, что число $3^{2007} + 7^{2007}$ делится на 37.

№ 104(А)

Доказать, что сумма квадратов семи последовательных целых чисел не является полным квадратом.

№ 105(А)

Разложить многочлен $x^{13} + x^{11} + 1$ на два множителя.

№ 106(А)

В равнобедренном треугольнике с основанием a острый угол при вершине равен 2α. Найти площадь треугольника, заключенного между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне.

№ 107(А)

Решить уравнение $4x^3 - 6x^2 + 3x - a = 0$.

№ 108(А)

Решить уравнение $x + y + 5 = 2\sqrt{3x} + \sqrt{2y}$.

№ 109(А)

Решить уравнение $9^{\sin^2 \frac{\pi x}{4}} + 9^{\cos^2 \frac{\pi x}{4}} = \sqrt{34 + 4x - 2x^2}$.

№ 110(А)

В зависимости от значений параметра a решить уравнение $x^5 - 5x^3 + 5x = a^5 + \dfrac{1}{a^5}$.

№ 111

Найти остаток от деления 6^{592} на 11.

№ 112(А)

Решить уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = \dfrac{\pi^2}{18}$.

№ 113(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k, \; k \in Z, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

№ 114(А)

При каком значение параметра p уравнение $px^{-2} + 3 = 5p - 4x^{-2}$ не имеет корней?

№ 115(А)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x^3z - y^3z = 4y^2 - x^2, \\ 9xz - 5y = \dfrac{30}{xyz}, \\ 2x - y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

№ 116

Доказать, что при любом натуральном n следующие выражения есть целые числа: $\dfrac{10^n+2}{3}$; $\dfrac{10^n+8}{9}$; $\dfrac{10^n+5}{5}$.

№ 117

При каком условии многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ является кубом двучлена первой степени?

№ 118(А)

Найти условие делимости $(x + 1)^m + (x - 1)^m$ на x, где $m \in N$.

№ 119(А)

Разложить на множители $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.

№ 120

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + xy = 41, \\ x + z + xz = 26, \\ y + z + yz = 125. \end{cases}$$

№ 121

Решить в рациональных числах уравнение $x^y = y^x$.

№ 122(А)

Произведение первой цифры числа на оставшуюся часть 104, а произведение последней цифры числа на оставшуюся часть 243. Найти это число.

№ 123

Найти прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы целыми числами, причем все 9 цифр, участвующих в записи сторон, различны.

№ 124

Найти все тройки чисел a, b, $c \in N$, являющихся длинами сторон треугольника с диаметром описанной окружности, равным 6,25.

№ 125

Решить уравнение $\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{97}{128}$, если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 126(А)

Решить в целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} 4k + 1 = m^2 \\ 3k + 1 = n^2, \text{ где } k > 0. \end{cases}$$

№ 127(А)

Найти в целых числах решения системы уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = x + y \\ a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2, \end{cases}$$

если числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию.

Раздел II

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

5 класс

№ 1

Решение. Можно. Поскольку $2007 = 669 \cdot 3 = 223 \cdot 9$, то

$$2007 = 9 + 223 + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{1775} = 9 \cdot 223 \cdot \underbrace{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{1775} =$$

$$= 3 + 669 + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{1335} = 3 \cdot 669 \cdot \underbrace{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{1335}.$$

№ 2

Решение. Условие задачи коротко запишем так:

$$4у + 5г = 4100,$$
$$5у + 4г = 4000.$$

Вес 9 утят и 9 гусят будет равен $4100 + 4000 = 8100$ г, значит, вес 1 утенка и 1 гусенка равен $8100 : 9 = 900$ г, тогда вес 4 утят и 4 гусят будет $900 \cdot 4 = 3600$ г. Сравнение полученного результата со вторым условием показывает, что 1 утенок весит $4000 - 3600 = 400$ г.

№ 3

Решение. Нет. В каждом рукопожатии используют две руки, значит, общее число рук должно быть четным, но у 13 марсиан $3 \cdot 13 = 39$ рук — число нечетное.

№ 4

Решение. Не существуют. Поскольку произведение трех множителей — нечетное число, то каждый из множителей должен быть нечетным, но если m и n — нечетны, то $m - n$ — четно. Противоречие.

№ 5

Решение. Всякое трехзначное число можно записать в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где a — цифра сотен, b — десятков, c — единиц. Согласно условию задачи имеем:

$\overline{xyz}+\overline{xzy}+\overline{yxz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}+\overline{zyx}=222\,(x+y+z)=5328,$ откуда $x+y+z=24$. Заметим, что существует единственная тройка различных однозначных чисел, сумма которых равна 24. Это числа 7, 8, 9.

№ 6

2854106. *Указание.* Удобно предварительно рассмотреть случаи, когда зачеркивается одна или две цифры.

№ 7

Ответ: $125 \cdot 125 = 15625$

№ 8

Ответ: 500 и 2000.

№ 9

Решение. $10a + b = 13a$, $b = 3a$, откуда имеем 3 числа: 13, 26 и 39.

№ 10

Ответ: 200 рублей.

№ 11.

Ответ: $2309 + 2309 = 4618$.

№ 12

Решение.

$$\frac{2006\cdot 13-1000}{2007\cdot 12+1000}=\frac{2007\cdot 13-13-1000}{2007\cdot 13-2007+1000}=\frac{2007\cdot 13-1013}{2007\cdot 13-1007}<1,$$

т.е. дробь правильная.

№ 13

Ответ 4 р., 5 р., 8 р.

№ 14

Решение. Припишем к данному числу 2007 два нуля. Получим 200700. Если это число разделим на 47, то в частном получим 4270 и в остатке 10, т.е. имеем: $200700 = 47 \cdot 4270 + 10$.

Чтобы искомое число разделилось на 47, необходимо прибавить еще $47 - 10 = 37$. А это значит, что две последние цифры искомого числа будут равны 3 и 7.

№ 15

Ответ: 8.

№ 16

Решение. Пусть отец будет втрое старше сына через x лет. Тогда получим уравнение

$$3(7 + x) = 37 + x,$$

или $$21 + 3x = 37 + x,\ 2x = 16,\ x = 8.$$

№ 17

Ответ: уменьшится на 16%.

№ 18

Решение. $123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 =$
$= (123 + 321) + (132 + 312) + (213 + 231) = 444 \cdot 3 = 1332$,
или $(123 + 312 + 231) + (132 + 321 + 213) = 666 \cdot 2 = 1332$.

№ 19

Решение. Один из способов указан на рисунке 26. Найти другие способы решения.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Рис. 26

№ 20

Ответ: $4940 + 7940 = 12880$.

№ 21

Решение. Среди натуральных чисел от 1 до 100 имеется ровно 20, которые делятся на 5 (в каждом десятке по 2), из них лишь 4 числа делятся на $5 \cdot 5 = 25$. Значит, 24 произведения чисел $2 \cdot 5$ образуют 24 нуля.

№ 22

Решение.

I взвешивание. Положим на чашки весов любые две монеты. Если весы в равновесии, то выбранные монеты настоящие. В противном случае настоящими будут другие две монеты.

II взвешивание. Возьмем одну из настоящих монет и одну из другой пары. В зависимости от состояния весов, рассуждая аналогично, указываем фальшивую монету. Следовательно, фальшивую монету можно определить за два взвешивания.

№ 23

Решение. Каждому маршруту из *А* в *Б* соответствует 5 различных маршрутов из *Б* в *В*. Значит города *А* и *В* соединяют $3 \cdot 5 = 15$ различных маршрутов через город *Б*.

№ 24

Решение. Заметим, что если два числа имеют одинаковую четность, то их разность будет числом четным; если же одно из чисел четное, а другое — нечетное, то их разность — число нечетное. Следовательно, после каждой операции количество нечетных чисел сохраняется или уменьшается на 2. Первоначально написаны 1004 нечетных числа, после каждой операции остается нечетное число нечетных чисел, значит, в конце записи останется одно нечетное число.

№ 25

Решение. Всякое трехзначное число можно представить в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где a — цифра сотен, b — десятков, c — единиц. Согласно условию $b = a + c$, тогда имеем:

$100a + 10b + c = 100a + 10\cdot(a + c) + c = 110a + 11c =$
$= 11(10a + c)$ — кратно 11.

№ 26

Указание. $\dfrac{(10a+b)-(a+b)}{a}=\dfrac{9a}{a}=9$, где $10a + b$ — двузначное число, a — цифра десятков, b — единиц.

№ 27

Ответ: 15,2%.

№ 28

Решение. Нет, нельзя, поскольку число тарелок, лежащих вниз дном после каждого переворачивания нечетно.

№ 29

Ответ: 30°.

№ 30

Ответ: $6\frac{5}{6}$ и $16\frac{5}{6}$.

№ 31

Решение. $3-\left(\dfrac{4}{17}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{5}{17}\right)=3-\dfrac{10}{17}=\dfrac{41}{17}$. Значит, пропущено 41 слагаемое с числителем 1.

№ 32

Ответ: 41.

№ 33

Решение. Согласно условию, имеем равенство

$$a_1 - a_2 = a_3 - a_1,$$

или

$$2a_1 = a_2 + a_3,$$

откуда

$$a_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3).$$

№ 34

Указание. Учесть, что

$(1 + 1000) + (2 + 999) + (3 + 998) + \ldots = 1001 \cdot 500 = 500500.$

№ 35

Ответ: на 1.

№ 36

Указание. 36 : (7 – 1) = 6 секунд.

№ 37

Ответ: 43,5 см и 56,5 см.

№ 38

Решение. Пусть n и $n + 1$ два последовательных натуральных числа. Согласно условию $n + (n + 1) = 1001$, или $2n = 1000$, $n = 500$, тогда $n + 1 = 501$. Искомые числа 500 и 501.

№ 39

Решение. Заметим, что $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Чтобы из этой суммы получить число 40, необходимо некоторые знаки «+» заменить на «–». Но при замене одного плюса на минус, сумма уменьшается на удвоенное число, перед которым поменяли знак, а именно, на четное число. Поскольку разность между нечетным числом 45 и четным есть число нечетное, то получить четное число 40 невозможно.

№ 40

Решение. После каждого безобразия число кусков возрастает на 9 (1 кусок Вася забирает, 10 добавляет). Значит, число кусков после n-го безобразия будет $1 + 9n$.

Но $2007 = 223 \cdot 9 + 0$ и не может давать остаток 1 при делении на 9.

№ 41

Решение. Из трех чисел, по крайней мере, два являются одинаковой четности (оба четные или оба нечетные). Тогда, их сумма делится на 2.

№ 42

Ответ: 745.

№ 43

Решение. Имеем уравнение: $9 + n \cdot 999 = 9999$;
$999n = 9990$, откуда $n = 10$ (раз).

№ 44

Ответ: 7 крольчат и 8 гусят.

№ 45

Решение. Пусть 1 тетрадь стоит x руб., тогда получим уравнение:

$$15x + 7 = 20x - 8, \text{ или } 5x = 15, x = 3.$$

Значит, 1 тетрадь стоит 3 руб., а у Сергея было $15x + 7 = 3 \cdot 15 + 7 = 52$ (руб.)

№ 46

Указание. Учесть, что $101 \cdot 111111 = 101 \cdot 111 \cdot 1001$ и $101101 \cdot 111 = 101 \cdot 1001 \cdot 111$. Так что, значение выражения равно 0.

№ 47

Решение. Пусть внуку x лет, а бабушке — y лет. Так как 1 год = 12 мес., то $12x = y$. Кроме того, им вместе 78 лет, тогда $x + y = 78$, или $x + 12x = 78$, $13x = 78$, $x = 6$. Значит, внуку 6 лет, тогда бабушке будет $78 - 6 = 72$ года.

№ 48

Решение. Можно (см. рис. 27).

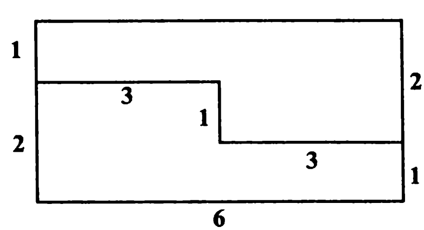


Рис. 27

№ 49

Решение.

Верные ответы	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
Очки	390	367	344	321	298	275	252	229	206	183	160

Как видно из таблицы, участник викторины правильно ответил на 20 вопросов.

Замечание. Количество набранных очков уменьшается на $13 + 10 = 23$.

№ 50

Решение. Периметр $P = 2(a + b)$, где a — длина, b — ширина прямоугольника. $65\% = 0{,}65$, тогда $a - 0{,}65a = 7$, откуда $a = 20$, $b = 0{,}65a = 20 \cdot 0{,}65 = 13$.

Значит $P = (20 + 13) \cdot 2 = 66$ (м).

№ 51

Ответ: 30°; 60°; 90°.

№ 52

Указание. $x + y = 51$; $0{,}3x = 0{,}6y$, тогда $x = 2y$ и $2y + y = 51$, $y = 17$, $x = 34$. Искомые числа 17 и 34.

№ 53

Указание. $100\% - 30\% = 70\% = 0{,}7$; $2x \cdot 0{,}7 = 7$,

откуда $x = 5$, т.е. нужно 5 т муки.

№ 54

Решение. $1\% = 0{,}01$

1) 100 т $\cdot\, 0{,}01 = 1$ т — количество воды в добытом угле.

2) 100 т $- 1$ т $= 99$ т — чистого угля.

$$\begin{aligned}&99\text{ т} — 100\% \\ &x\text{ т} — 110\%\end{aligned}\text{, откуда } x = \frac{99 \cdot 110}{100} = 108{,}9\text{ т.}$$

3) $108{,}9 - 100 = 8{,}9$ т — увеличится масса добытого угля.

№ 55

Решение. Пусть x ч — оставшаяся часть суток, тогда истекшая часть будет $(24 - x)$ ч, что по условию равна $25\% = 0{,}25x$ ч. Имеем уравнение $24 - x = 0{,}25x$, откуда $x = 19{,}2$ (ч) = 19 ч 12 мин. Значит, теперь 24 ч – 19 ч 12 мин = = 4 ч 48 мин.

№ 56

Указание. $\dfrac{3000 \cdot 0{,}650 + 2000 \cdot 0{,}720}{3000 + 2000} = \dfrac{3390}{5000} = 0{,}678$. Значит, получился сплав 678 пробы.

№ 57

Решение. Учесть, что квадрат, также является прямоугольником, тогда с площадью по 1 см^2 будет 8 прямоугольников; по 2 см^2 — 10; по 3 см^2 — 4, по 4 см^2 — 5 и 8 см^2 — 1. Всего будет 8 + 10 + 4 + 5 + 1 = 28 прямоугольников.

№ 58

Ответ: дать шестерым детям по 1 яблоку, а седьмому — оставшееся яблоко вместе с пакетом.

№ 59

Решение. На рисунке 28 показано расположение стульев, удовлетворяющих условию задачи.

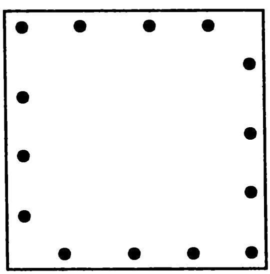
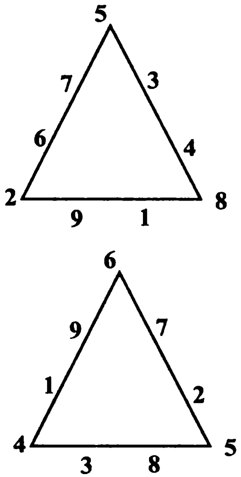


Рис. 28

№ 60

Решение (см. рис. 29).



5 + 7 + 6 + 2 = 5 + 3 + 4 + 8 =
= 2 + 9 + 1 + 8 = 20.

6 + 9 + 1 + 4 = 6 + 7 + 2 + 5 =
= 4 + 3 + 8 + 5 = 20.

Возможны и другие решения.

Рис. 29

№ 61

Решение (см. рис. 30).

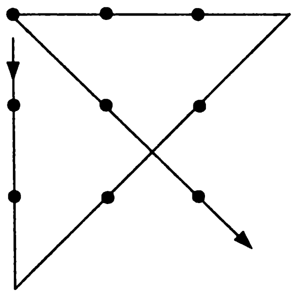


Рис. 30

№ 62

Ответ: 3 брата и две сестры.

№ 63

Решение. Скорость пассажира, находящегося во втором поезде, относительно двигающегося первого поезда будет равна $60 + 75 = 135$ (км/ч) $= 135 \cdot \frac{5}{18}$ (м/с) $= 37{,}5$ (м/с). Тогда длина первого поезда будет равна $37{,}5 \cdot 4 = 150$ (м).

№ 64

Указание. Искомые числа должны оканчиваться цифрой 0, т.е. $n = 7$; 17 и 27, удовлетворяют условию.

№ 65

Ответ: $x = 3$ или $x = 6$.

№ 66

Решение. Заметим, что при разрезании каждого листа на 4 части, число листов увеличивается на 3. Значит, добавится $28 - 10 = 18$ (листов), тогда разрезали $18 : 3 = 6$ (листов).

№ 67

Решение. Однозначных чисел использовано 9, двузначных потребуется $90 \cdot 2$ цифр. Пусть в книге x страниц, тогда страниц с тремя цифрами будет $x - (90 + 9) = x - 99$, а цифр на них $3(x - 99)$. Имеем уравнение $9 + 90 \cdot 2 + 3 \cdot (x - 99) = 1992$, откуда находим $x = 700$, т.е. в словаре 700 страниц.

№ 68

Решение. Поскольку средний возраст всей команды равен 24 года, то сумма возрастов всех игроков равна $11 \cdot 24 = 264$, а после удаления одного из игроков, средний возраст не изменился, тогда сумма 10 игроков будет $10 \cdot 24 = 240$. Значит, удаленному игроку было $264 - 240 = 24$ (года).

№ 69

Указание. Возможный вариант показан на рисунке 31.

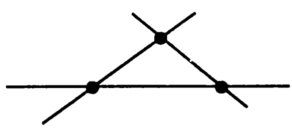


Рис. 31

№ 70

Решение.

1) $720 + 80 = 800$ (г) — получено смеси.

2) $80 : 800 = 0{,}1 = 10°$ — концентрация смеси.

№ 71

Решение. Два скачка собаки составляют 4 м; 3 скачка лисицы составляют 3 м. Следовательно, когда собака пробегает 4 м, расстояние между ними сокращается на 1 м. Первоначальное же расстояние между ними в 30 раз больше. Значит, собака догонит лисицу, когда пробежит 4 м $\cdot$ 30 = 120 м.

№ 72

Решение. Пусть первая часть числа x, тогда вторая часть равна $(15000 - x)$.

Согласно условию имеем уравнение:

$$0{,}05x + 0{,}07 \cdot (15000 - x) = 0{,}065 \cdot 15000,$$

откуда находим $x = 3750$ — I часть,

$15000 - 3750 = 11250$ — II часть.

№ 73.

Ответ: $342457 + 342457 = 684914$.

№ 74.

Указание. Достаточно установить последнюю цифру каждой степени, а затем сложить: $\ldots5^6$ — оканчивается на 5; $\ldots6^6$ — на 6, $\ldots7^6$ — на 9, тогда $5 + 6 + 9 = 20$, т.е. данная сумма оканчивается нулем.

№ 75.

Ответ: через 6 дней.

№ 76

Указание. Произведение двух натуральных чисел, сумма которых меньше 17, будет наибольшим, если каждое из них равно 8.

5 Зак 825

№ 77

Указание.

$(10 \cdot 4 + 5) + (11 \cdot 5) + (13 \cdot 5) + (15 \cdot 5) + (17 \cdot 5 + 5) =$
$= 45 + 5\,(11 + 13 + 15) + 90 = 330.$

№ 78

Ответ: 5.

№ 79

Решение. Нет, не могут. Для этого рассмотрим остатки от деления количества хамелеонов каждой окраски на 3.

$$7 = 3 \cdot 2 + 1; \quad 12 = 3 \cdot 4 + 0; \quad 11 = 3 \cdot 3 + 2.$$

Значит, в начальный момент упорядоченная тройка остатков имеет вид: (1; 0; 2).

После I встречи двух хамелеонов разной окраски (не важно какой), тройка остатков имеет вид (0; 2; 1); после II встречи — (2; 1; 0), после III — (1; 0; 2) и т.д. Как видим, комбинация (0; 0; 0) (36 хамелеонов одного цвета) не может встретиться.

№ 80

Решение. В I колонне было больше «Опелей», чем во II, значит, в ней было не меньше шести «Опелей». Можно убедиться непосредственной проверкой, что в I колонне могло быть только 7 «Опелей», а поэтому еще была 21 машина «Порше». Во второй колонне было 24 «Порше».

№ 81

Ответ: на 25%.

№ 82

Ответ: 25.

№ 83

Указание. Нет, нельзя. Так как, очевидно, что при $n = 17$ (и даже при $n = 16$) получим составное число: $17^2 + 17 + 17 = 17 \cdot 19$.

№ 84

Решение. При делении на 100 может получиться в остатке только одно из следующих чисел: 0, 1, 2, 3, ..., 99.

Поэтому среди 101 числа найдутся два, которые при делении на 100 дают равные остатки. Следовательно, их разность делится на 100.

№ 85

Ответ: при $n > 6$.

№ 86

Решение. Пусть r_1 — остаток от деления n^2 на 19, а r_2 — остаток от деления 2^n на 19. Заметим, что число $n^2 + 2^n$ будет делиться на 19 тогда, когда сумма остатков будет равна 19. Составим таблицу:

n	1	2	3	4	5
r_1	1	4	9	16	6
r_2	2	4	8	16	13
$r_1 + r_2$	3	8	17	32	19

Как видно из таблицы, $r_1 + r_2 = 19$ при $n = 5$.

№ 87

Указание. Понедельник. Установить, что суббота может быть только 2, 9, 16, 23 и 30 числа месяца.

№ 88

Указание. Одним способом. Решение задачи сводится к решению в целых числах уравнения $7x + 12y = 100$.

№ 89

Указание. 3 и 6 или 4 и 4. Показать, что если прямоугольник разбить на квадраты со стороной, длина которой равна 1, то должно быть ровно 4 квадрата, не имеющих общих точек со сторонами прямоугольника.

Замечание. Задачу можно решить иначе: если x — длина, y — ширина прямоугольника, то $2(x+y) = xy$, откуда $x = \frac{2y}{y-2}$ или $x = 2 + \frac{4}{y-2}$. Так как $x, y \in N$, то находим $x = 3$; $y = 6$ или $x = y = 4$.

№ 90

Решение. Искомое число имеет вид $\overline{7xy} = 700 + 10x + y$, где $x \neq y$.

Так как $\overline{7xy}$ кратно 3, то $7 + x + y = 3k$.

Но $0 \leq x + y \leq 18$, или $0 \leq 3k - 7 \leq 18$, $7 \leq 3k = 25$,

$2\frac{1}{3} \leq k \leq 8\frac{1}{3}$, откуда $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

При $k = 8$, $x + y = 17$.

Тогда $x = 9$, $y = 8$ и 798 — искомое число.

№ 91

Указание. Задача не имеет смысла — ведь 8 человек рабочих не могут копать отверстие диаметром 1 м!

№ 92

Решение. 4 пары + 8 пар + 1 пара = 13 пар;

$13 \cdot 2 = 26$ (участников).

№ 93

Решение (см. рис. 32).

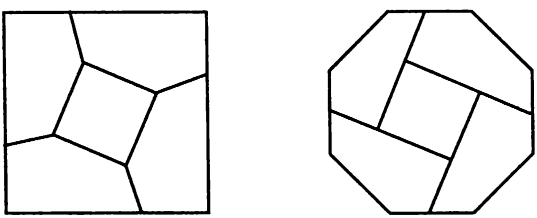


Рис. 32

№ 94

Решение. Хозяйка заполнила 5-литровую посуду. Из нее она перелила 3 л в 3-литровую посуду и затем эти 3 л она вылила в раковину. Оставшиеся в 5-литровом сосуде 2 л воды она вылила в 3-литровый сосуд. Затем она снова заполнила 5-литровый сосуд водой и из него перелила 1 л в 3-литровую посудину. В большой посудине осталось ровно 4 л.

№ 95

Ответ: всего было 85 учеников.

№ 96

Ответ: шестеро.

№ 97

Ответ: $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

№ 98

Решение. Если x — ребро куба, то его объем равен x^3. При увеличении каждого ребра на 10%, его длина станет $x + 0{,}1x = 1{,}1x$, а объем станет $(1{,}1x)^3 = 1{,}331x^3$. Значит, объем куба увеличится на $1{,}331 \cdot 100 - 100 = 33{,}1$ (%).

№ 99

Решение. За 1 день каменщик выполнит $\frac{1}{3}$ часть всей работы, а за 2 дня он выполнит $\frac{2}{3}$ всей части. Ученику на 2 дня остается $\frac{1}{3}$ часть. На всю работу ученику потребуется 6 дней.

№ 100

Указание. $|x - 3| \neq 0$, $3 - \frac{3}{|x-3|} \neq 0$, т.е. $|x - 3| \neq 1$, откуда находим: $x \neq 2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$.

№ 101

Решение (см. рис. 33).

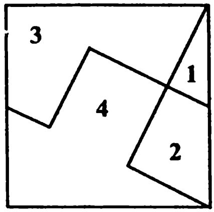


Рис. 33

№ 102

Решение (см. рис. 34).

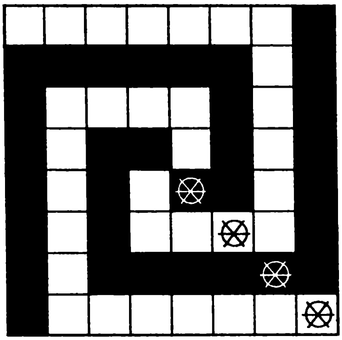


Рис. 34

№ 103

Решение (см. рис. 35).

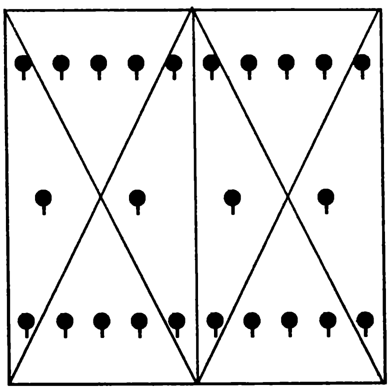


Рис. 35

№ 104

Решение. Поднимаясь на 2 м по стволу, белка совершает путь длиной 2,5 м. Значит, взобравшись на дерево высотой 8 м, она пройдет путь длиной 10 м.

№ 105

Решение (см. рис. 36).

Убрать 4 спички, показанные пунктиром и останутся 4 равных треугольника.

№ 106

Ответ (см. рис. 37).

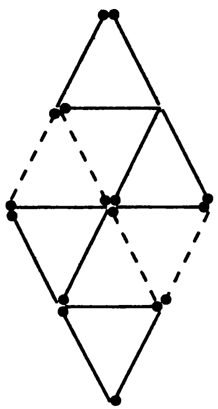


Рис. 36

17	7	9
3	11	19
13	15	5

Рис. 37

6 класс

№ 1

Решение: $1-\frac{2005}{2006}=\frac{1}{2006}$; $1-\frac{2006}{2007}=\frac{1}{2007}$.

Но $\frac{1}{2006}>\frac{1}{2007}$, значит $\frac{2005}{2006}<\frac{2006}{2007}$.

№ 2

Ответ: правильной.

№ 3

Решение. Искомое число должно быть кратным 3 и 5, т.е. кратным 15, которое и будет наименьшим.

№ 4

Ответ: $\frac{17}{13}$. Общий вид $\frac{17+17n}{13+13n}$, где $n \in N$.

№ 5

Ответ: 15.

№ 6

Ответ: НОД — b, НОК — $35b$.

№ 7

Решение. Согласно условию $\overline{ab}-(a+b)=\overline{ba}$,

или $10a + b - a - b = 10b + a$, откуда $4a = 5b$.

Полученное равенство возможно лишь при $a = 5$, при $b = 4$, т.е. искомое число 54.

№ 8

Ответ: 5.

№ 9

Ответ: 5000 р.

№ 10

Ответ: Нет.

№ 11

Ответ: $142857 \times 7 = 999999$.

№ 12

Указание. $N = \overline{ab} = 10a + b$ — искомое двузначное число. Согласно условию $N = 7m + 5 = 19n + 9$ и $10 \leq N \leq 99$.

Так как m и n — целые неотрицательные числа, то $1 \leq n \leq 4$; $7m = 19n + 4$, откуда находим единственное число $N = 47$.

№ 13

Ответ: 4 и 2.

№ 14

Ответ: КАРЛ = 9056, ГАУСС = 10833.

№ 15

Решение. Запишем данное число в виде 111111100 + + 22222220 + 1111111, замечаем, что оно кратно 1111111, т.е. простым не является.

№ 16

Указание. Рассмотрим 2 случая:

1) $m = 2k$ — четное;

2) $m = 2k + 1$ — нечетное.

№ 17

Ответ: 142 кг.

№ 18

Указание. Учесть, что площадь прямоугольника равна площади квадрата.

№ 19

Решение. Поскольку 157 — простое число, то либо 157 кошек съели по одной мышке, либо 1 кошка съела 157 мышек.

Так как кошек должно быть меньше мышек, то была одна кошка.

№ 20

Решение. Пусть в классе M мальчиков и Д девочек, тогда согласно условию задачи имеем:

$$\frac{3{,}8M + 3{,}5Д}{M + Д} = 3\frac{8}{13},$$

или $$3{,}8 \cdot 13M + 3{,}5 \cdot 13Д = 47M + 47Д,$$

$$M(3{,}8 \cdot 13 - 4{,}7) = Д(47 - 3{,}5 \cdot 13),$$

откуда $M = \frac{5}{8}Д$.

Количество детей писавших контрольную равно

$$Д + \frac{5}{8}Д = \frac{13}{8}Д, \text{ где } \frac{Д}{8} \text{ — целое число.}$$

Заметим, что существует единственное целое $k = 2$, такое, что $20 < 13k < 30$. Значит, контрольную работу писали 26 учеников.

№ 21

Решение. Пусть H — высота стены, V — скорость первого паука, t_1 — время, затраченное первым пауком на подъем и спуск.

Заметим, что $t_1 = \frac{H}{V} + \frac{H}{V} = \frac{2H}{V}$. Второй паук затратил на подъем и спуск время $t_2 = \frac{3H}{V} + \frac{H}{3V} = \frac{10H}{3V}$.

Так как $t_1 < t_2$, то первый паук спустился быстрее.

№ 22

Указание. Число делится на 72, если оно делится и на 9, и на 8. Число делится на 8, если три последние цифры представляют число, кратное 8. Условию задачи удовлетворяют числа: 762408; 767448; 763488.

№ 23

Ответ: на 26,5%.

№ 24

Указание. Пусть Заяц внес x р. Тогда получим уравнение $x + 2(x - 1) = 25$, откуда $x = 9$, т.е. Заяц внес 9 р., а Волк внес 16 р.

№ 25

Решение. Наименьшее двузначное число, являющееся квадратом, начинается с $16 = 4^2$. Имеем: 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2.

Нетрудно проверить, что единственное число, удовлетворяющее условию задачи, является число 64, так как $8^2 = 4^3 = 64$.

№ 26

Ответ: нет корней при $a = \frac{1}{2}$; $x = \frac{6}{1-2a}$ при $a \neq \frac{1}{2}$.

№ 27

Решение. Пусть x — длина поезда, тогда скорость поезда мимо неподвижного пассажира $\frac{x}{7}$ м/с, а скорость поезда мимо платформы будет $\frac{x+378}{25}$ м/с.

Согласно условию задачи эти скорости равны, т.е. имеем уравнение $\frac{x}{7} = \frac{x+378}{25}$, откуда находим $x = 147$.

Следовательно, длина поезда 147 м.

№ 28

Решение. Допустим обратное, т.е. ученики собрали разное количество арбузов, тогда они собрали всего не больше, чем $0 + 1 + 2 + \ldots + 15 + 16 = 136 > 100$.

Получили противоречие с условием, что и доказывает утверждение задачи.

№ 29

Решение. Так как $-1002+1002=-1001+1001=\ldots=-1+1=0$, то рассматриваемая сумма будет равна $1003 + 1004 = 2007$.

№ 30

Ответ: 100 слагаемых.

№ 31

Решение. $\overline{ab}=10a+b=a+b+c$, откуда $9a=c$, тогда $a=1$, $c=9$, $b=\overline{0;9}$ (все цифры от 0 до 9 включительно). Значит, 109 — наименьшее трехзначное число, удовлетворяющее условию.

№ 32

Решение. Заметим, что
$1313 = 1300 + 13 = 13 \cdot (100 + 1) = 13 \cdot 101$.

Аналогично $1717 = 17 \cdot 101$, тогда $\dfrac{1313}{1717}=\dfrac{13\cdot101}{17\cdot101}=\dfrac{13}{17}$.

Следовательно, $\dfrac{1313}{1717}=\dfrac{13}{17}$.

№ 33

Решение. Если m — числитель дроби, то $(m-1)$ — знаменатель дроби, тогда

$$m+\frac{m}{m-1}=m\left(1+\frac{1}{m-1}\right)=m\cdot\frac{m-1+1}{m-1}=m\cdot\frac{m}{m-1}.$$

Придавая m любое натуральное значение кроме $m = 1$, получим сколько угодно подобных равенств.

№ 34

Решение. Число делится на 12, если оно делится и на 4, и на 3. Так как сумма цифр 7, 4, 6, 2 равна 19, то сумма двух недостающих цифр должна равняться 2, 5, 8, 11, 14 или 17. Кроме того, искомое число должно делиться на 4, и так как предпоследняя цифра равна 2, то последняя цифра может быть 0, 4 или 8. Тогда получим 10 чисел: 724620, 754620, 784620, 714624, 744624, 774624, 704628, 734628, 764628, 794628. Наименьшим из них будет 704628, а наибольшим — 794628.

№ 35

Ответ: $x_{1,2} = \pm 0{,}6$.

№ 36

Указание. 660 – 66 = 594 (руб.) — стала цена портфеля.

№ 37

Решение. Сравним дроби с помощью дополнения.каждой из них до 1: $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$; $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$; $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$; $1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$.

Так как $\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\frac{1}{6}>\frac{1}{7}$, то $\frac{6}{7}>\frac{5}{6}>\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$.

№ 38

Решение. Заметим, что сумма двух чисел будет четной, если они оба одинаковой четности, т.е. оба четные или оба нечетные. Сумма двух чисел будет нечетной, если они разной четности, т.е. одно их них четное, а другое — нечетное.

Пусть сумма двух любых соседних чисел нечетна, тогда нечетные и четные числа будут чередоваться. Значит, общее количество их будет четным. Но, по условию всего 2007 чисел — нечетно, т.е. наше допущение неверно, а это означает, что найдутся 2 соседних числа, сумма которых четна.

№ 39

Указание. (40 – 2) : 2 + 2 = 21 кг.

№ 40

Решение:

1) 27 – 5 = 22 (ученика) посещают кружки;
2) 22 – 19 = 3 (ученика) посещают лишь химический кружок;

3) $6 - 3 = 3$ (ученика) посещают оба кружка.

Итак, 3 ученика (химика) увлекаются и математикой.

№ 41

Решение. Заметим, что на последнюю цифру данного числа будут влиять лишь последние цифры чисел, участвующих в записи данного числа. Следовательно, искомая цифра будет последней и в числе $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 6^2 \cdot 7^2 = 1884$.

Значит, последняя цифра будет $0 + 4 = 4$.

№ 42

Ответ: $-2 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 3$.

№ 43

Решение. $MN = 160$ стр.

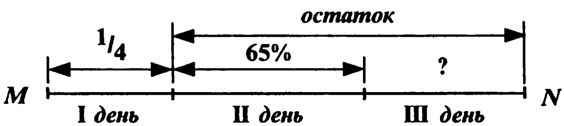


Рис. 38

1) $160 \cdot \frac{1}{4} = 40$ (стр.) — за один день.
2) $160 - 40 = 120$ (стр.) — осталось прочитать.
3) $65\% = 0{,}65$; $120 \cdot 0{,}65 = 78$ (стр.) — за II день.
4) $120 - 78 = 42$ (стр.) — за III день.

Итак, в I день ученик прочитал 40 страниц, во II день — 78 страниц и в III день — 42 страницы.

№ 44

Ответ: 19 раз.

№ 45

Указание. $100x + 10 + y = 9(10x + y)$, или $10x + 10 = 8y \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 5$, тогда $x = 3$. Искомое число 35.

№ 46

Указание. $\frac{1}{2}\overline{xy} = x + y$, или $10x + y = 2(x + y)$, откуда $y = 8x \Rightarrow x = 1, y = 8$. Искомое число 18.

№ 47

Решение.

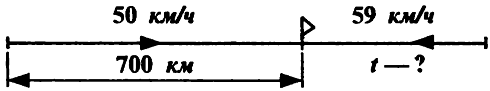


Рис. 39

$S = 1231$ км.

1) 700 : 50 = 14 (ч) — шел I поезд до встречи.

2) 1231 – 700 = 531 (км) — прошел II поезд до встречи.

3) 531 : 59 = 9 (ч) — шел II поезд до встречи.

4) 14 – 9 = 5 (ч).

Следовательно, II поезд вышел на 5 ч позже I.

№ 48

Указание. $3 : 5 = 60 : x$, откуда $x = 100$, т.е. масса золота в сплаве 100 г.

№ 49

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 12{,}4$.

№ 50

Решение. Пусть во всех классах не менее 35 учеников, тогда в школе будет не менее $35 \cdot 29 = 1015$ учеников, что противоречит условию задачи. А это означает, что в школе найдется класс, в котором менее, чем 35 учеников.

№ 51

Решение. У большого кубика площадь одной грани равна $6 \cdot 6 = 36$, а у маленького кубика равна $3 \cdot 3 = 9$, т.е. каждая грань большого кубика в 4 раз больше грани маленького, а значит, и краски понадобится в 4 раза больше, т.е. $3 \cdot 4 = 12$ г.

№ 52

Решение. Если бы в каждой конюшне было по четному числу лошадей, то общая их сумма была бы четным числом, а не 79.

№ 53

Решение. Пусть *К* — красные кубики, *Ч* — черные, *Б* — белые, тогда получим 5 способов размещения кубиков; в ящике *А* могут быть кубики: *КК, КБ, КЧ, ЧБ, ЧЧ*.

№ 54

Указание. $\frac{4}{x}-\frac{y}{6}=\frac{5}{18}$, $x=\frac{72}{3y+5}$.

При $y=1$, $x=9$, получим: $\frac{4}{9}-\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$.

Учесть, что x и у могут быть отрицательными, например, при $y=-2$, $x=-72$, тогда $\frac{4}{-72}-\frac{-2}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=\frac{5}{18}$, и т.д.

№ 55

Решение.

1. Заменим данные числа обратными:

$$\frac{3}{1};\ \frac{5}{4;};\ \frac{4}{9};\ \frac{1}{1}.$$

2. Составим отношение полученных чисел:

$$\frac{3}{1}:\frac{5}{4}:\frac{4}{9}:\frac{1}{1}.$$

3. Заменим отношения целыми числами, для чего умножим каждый член отношения на наименьший общий знаменатель 36:

$$\frac{3}{1}:\frac{5}{4}:\frac{4}{9}:\frac{1}{1}=\frac{108}{36}:\frac{45}{36}:\frac{16}{36}:\frac{36}{36}.$$

4. Умножим каждый член отношения на коэффициент пропорциональности и найдем его значение:

$108k + 45k + 16k + 36k = 1025$, откуда $k = 5$.

5. Найдем искомые числа:

$108k = 540$; $45k = 225$; $16k = 80$; $36k = 180$.

6. Проверка:

$540 + 225 + 80 + 180 = 1025$

$540 : 225 : 80 : 180 = 108 : 45 : 16 : 36$ (сократили на 5).

Итак, искомые числа: 540; 225; 80; 180.

№ 56

Решение. Пусть x — искомое число, тогда $6x = a^3$, и, так как a^3 кратно 6, то и само число a кратно 6, т.е. $a = 6b$. Но тогда $x = 36b^3$. Так как искомое число трехзначное, то возможное значение $b = 2$, тогда $x = 36 \cdot 8 = 288$ и $b = 3$, $x = 36 \cdot 27 = 972$.

Итак, искомые числа 288 и 972.

№ 57

Решение. Если разделить число 777...77 на 19 «уголком», то заметим, что I нулевой остаток достигается для числа, состоящего из 18 семерок, а в дальнейшем остатки будут повторяться. Значит, число 777...77 кратно 19, если число его цифр кратно 18.

№ 58

Указание. Выписать все трехзначные числа, кратные 19, затем среди них выбрать 3 числа с различными цифрами, дописав в качестве последней цифры число 0 так, чтобы одно из полученных чисел было наибольшим, а другое — наименьшим. Тогда 9128364750 — наибольшее, 2473615890 — наименьшее.

№ 59

Указание. $a^2 - 3a = (a - 1)a - 2a$.

$(a - 1)a$ — произведение двух целых последовательных целых чисел, кратное 2, так как одно из них четное, а другое — нечетное; $2a$ — кратно 2 при любом целом a.

№ 60

Решение (см. рис. 40).

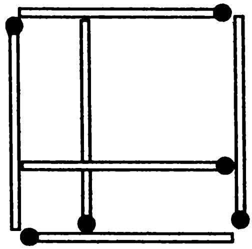


Рис. 40

№ 61

Указание. Учесть, что числитель I дроби в 30 раз больше числителя II дроби, тогда

$$x + 3 = 10{,}1 \cdot 30,$$

откуда

$$x = 303 - 3 = 300.$$

№ 62

Решение.

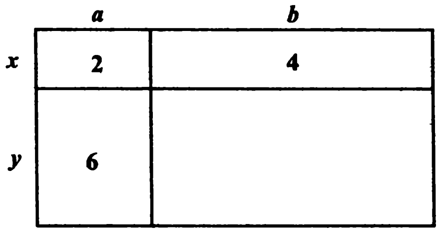


Рис. 41

Площадь прямоугольника равна $S = (a + b)(x + y)$.

Заметим, что $ax = 2$, $ay = 6$, $bx = 4$.

Кроме того, $x(a + b) = 6$ и $a(x + y) = 8$.

Перемножая два последних равенства, получим:

$$ax(a + b)(x + y) = 6 \cdot 8, \text{ или } 2 \cdot (a + b)(x + y) = 48,$$

откуда

$$(a + b)\,(x + y) = S = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

№ 63

Решение. Заметим, что число тем меньше, чем меньше цифры в старших разрядах. Поскольку максимальное количество девяток будет 11, то поместим их в младшие разряды, а число 1, которое осталось — в старший разряд. Тогда искомое число будет иметь вид 199…9, где цифра 9 записывается 11 раз.

№ 64

Указание. Задача сводится к уравнению

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x,$$

откуда находим $x = 28$. Значит, школу Пифагора посещают 28 человек.

№ 65

Решение. Если данная дробь сократима, то сократима и дробь $\frac{8n+5}{6n+4}=1+\frac{2n+1}{6n+4}$, а значит, и дробь $\frac{6n+4}{2n+1}=3+\frac{1}{2n+1}$.

Но тогда сократима и дробь $\frac{1}{2n+1}$, что неверно.

№ 66

Указание. Если $\overline{ab}$ — двузначное число, то, согласно условию, имеем: $\overline{ab}-ab=4(a+b)$, или $a(6-b)=3b$, откуда $a=\frac{3b}{6-b}$. Так как $1\le a\le 9$; $0\le b\le 9$, то $b = 3$ или $b = 4$, тогда $a = 3$ и $a = 6$. Имеем 2 числа 33 и 64, удовлетворяющие условию.

№ 67

Решение. Пусть $\overline{ab}=10a+b$ — двузначное число, где a — цифра десятков, b — единиц. Согласно условию

$$10a + b = a^2 + b^3;$$
$$10a - a^2 = b^3 - b;$$
$$a(10 - a) = (b - 1)b(b + 1).$$

В правой части полученного равенства — произведение трех последовательных целых положительных чисел. Этому равенству удовлетворяют 2 пары чисел:

1) $a = 4$; $24 = 2\cdot 3\cdot 4$; $b = 3$, тогда искомое число 43.

2) $a = 6$; $24 = 2\cdot 3\cdot 4$; $b = 3$, получим число 63.

Найденные числа удовлетворяют условию задачи, так как $43 = 4^2 + 3^3$ и $63 = 6^2 + 3^3$.

№ 68

Решение. Согласно условию $\overline{xyz} = 19(x + y + z)$, или $100x + 10y + z = 19(x + y + z)$, откуда $x = \frac{y + 2z}{9}$, тогда при $y = 9$ и $z = 9$ получим $x = 3$, значит, 399 — наибольшее число, удовлетворяющее условию задачи.

№ 69

Решение. Примем объем бассейна за условную единицу.

1) За 1 ч бассейн наполняется I трубой на $1:5 = \frac{1}{5}$ часть.

2) За 1 ч бассейн опорожняется II трубой на $1:6 = \frac{1}{6}$ часть.

3) За 1 ч бассейн наполняется на $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ часть.

4) $1 : \frac{1}{30} = 30$ (ч) — будет наполнен весь бассейн.

№ 70

Ответ: $\angle 1 = 40°, \angle 2 = 30°, \angle 3 = 20°$.

№ 71

Указание. Значение дроби равно 24,
тогда $24 \cdot 100 : 4{,}8 = 500$ — искомое число.

№ 72

Решение. Пусть искомые числа x_1, x_2, x_3 и x_4, тогда получим: $x_1 : x_2 = 2 : 3$, $x_2 : x_3 = 3 : 5$, $x_3 : x_4 = 5:6$, откуда

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 3 : 5 : 6.$$

Следовательно, число 125 содержит $2 + 3 + 5 + 6 = 16$ равных частей, откуда $x_1 = \frac{125 \cdot 2}{16} = 15\frac{5}{8}$, $x_2 = \frac{125 \cdot 3}{16} = 23\frac{7}{16}$, $x_3 = \frac{125 \cdot 5}{16} = 39\frac{1}{16}$, $x_4 = 46\frac{7}{8}$.

№ 73

Указание. По условию $10a + b - ab = b^2$,
или $a(10 - b) = b(b - 1)$, где $1 \le a \le 9$, тогда $b \in (3; 6)$.

Если $b = 4$, то $a = 2$; если $b = 5$, то $a = 4$. Получим два числа: 24 и 45.

№ 74

Ответ: на $\dfrac{1}{12}$ числа; в $1\dfrac{1}{3}$ раза.

№ 75

Указание. $\dfrac{7a}{b} = \dfrac{a+b}{b}$, откуда $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{6}$.

№ 76

Ответ: 15.

№ 77

Ответ: увеличится в 3 раза.

№ 78

Решение. $НОК(16; 72) = 144$; $НОД(16; 72) = 8$,
тогда $144 \cdot 100 : 8 = 1800\%$.

№ 79

Решение. Поскольку $x = a - 3 - 4y$, то заданное выражение примет вид:

$$a(a - 3 - 4y) + 3(a - 3 - 4y) + 4ay + 12y + 9 =$$
$$= a^2 - 3a - 4ay + 3a - 9 - 12y + 4ay + 12y + 9 = a^2.$$

№ 80

Решение. $\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a =$
$= 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$ — делится на 11.

№ 81

Указание. Вынести общие множители за скобки. Тогда получим:

$$7(m - 3n - 1)m^4(1 + 3n - m) = -7m^4(m - 3n - 1) \le 0.$$

№ 82

Решение. Поскольку $x^2 - x = 1$,
то $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 3 =$
$= x^2(x^2 - 2x) - x(x^2 - 2x) + 2(x^2 - 2x) + 3 =$
$= x^2 \cdot 1 - x \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 = (x^2 - x) + 5 = 1 + 5 = 6.$

№ 83

Указание. Вынести за скобки общий множитель 3, 4, тогда получим: $\frac{7}{17} \cdot 3{,}4 \cdot 10 = 7 \cdot 2 = 14.$

№ 84

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$.

№ 85

Решение. Так как сумма $А + А + А$ имеет в числе единиц число $А$, то либо $А = 0$, либо $А = 5$.

Имеем 2 случая:

1. $А = 0$, тогда $Н = 3$, $К = 1$, $Г = 7$ и справедливо равенство

$$3 \cdot И + 2 = 10 + У.$$

Ясно, что $3 \le И \le 5$. Но $И \ne 3$, иначе $У = К = 1$; $И \ne 4$, иначе $И = У = 4$; $И \ne 5$, иначе $У = Г = 7$. Значит $А \ne 0$.

2. $А = 5$, тогда или $Н = 1$, или $Н = 8$.

Но $Н \ne 1$, так как $Н \ge 3К$. Значит, $Н = 8$ и, при этом, $К = 2$, $Г = 7$ и справедливо равенство:

$$3 \cdot И + 2 = 10 + У;\ 3 \le И \le 5.$$

Но $И \ne 4$, иначе $И = У = 4$; $И \ne 5$, так как $А = 5$. Значит, $И = 3$, а $У = 1$, тогда получим:

$$28375 + 28375 + 28375 = 85125.$$

№ 86

Указание. Vср. $= \dfrac{2}{\dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_2}} = 48$ (км/ч).

№ 87

Указание. Рассмотрим 2 случая: 1) $x \geq 0$, 2) $x < 0$.

Тогда $x_1 = -2,25$; $x_2 = 4,5$

№ 88

Ответ: 5.

№ 89

Ответ: на I полке было 13 книг, на II — 23 книги, на III — 16 книг.

№ 90

Указание. $99 + 999x = 99999$, откуда находим $x = 100$, т.е. нужно прибавить 100 раз.

№ 91

Решение.

Пусть $$a + b = 85. \qquad (1)$$

Заметим, что числа a и b должны содержать делители *НОК*; $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Из условия (1) $\Rightarrow$, что одно из чисел четное, другое — нечетное. Поэтому, делитель 2 должен принадлежать одному из чисел. Число 85 не делится на 3, значит, на 3 делится только одно слагаемое. Для a и b только 17 — общий делитель.

Так как $a + b = 85$, то $a = 2 \cdot 17 = 34$, $b = 3 \cdot 17 = 51$.

№ 92

Решение. Простые числа больше 2 могут оканчиваться цифрой 1, 3, 7 и 9. Тогда $\overline{ab} \cdot \overline{cb} = \overline{250b}$. Этому равенству подходит лишь цифра 1. Прикидка дает простые числа 41 и 61, так как $41 \cdot 61 = 2501$.

№ 93

Указание. Разность между трехзначным числом и его обращенным (т.е. записанным теми же цифрами, но в обратном порядке), делится и на 9 и на 99.

Тогда $987 - 789 = 198$ делится на 9 и 99.

№ 94

Указание. Применить признаки делимости на 5 и 9. Тогда 9876543210 — искомое число.

№ 95

Ответ: 111111.

№ 96

Решение. Поскольку слог *ЛЕТ* есть во всех словах, обозначим его буквой A. Так как сумма двух одинаковых четырехзначных чисел равна пятизначному числу, то $П = 1$. Тогда получим равенство:

$$(10 \cdot A + O) \cdot 2 = 10000 + 1000 \cdot O + A,$$

или $$19 \cdot A - 998 \cdot O = 10000,$$

где A — трехзначное число,

O — принимает значения 0, 1, … 9.

Легко показать (например, перебором), что $O = 7, A = 894$, тогда $8947 + 8947 = 17894$.

№ 97

Ответ: $\frac{87}{1300}$.

№ 98

Указание. Число $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Такие числа называются совершенными. Они могут быть найдены по формуле $P = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где p — простое число.

№ 99

Решение. Когда по радио передавали точно 12 ч, то Машины часы показывали на 10 мин. меньше, т.е. 11 ч 50 мин. Оставалось еще 10 мин, но в течение этих 10 мин часы Маши отстанут еще на 20 сек. Значит, 12 часов на Машиных часах будет через 10 мин и 20 сек.

№ 100

Решение. Пусть было x скамеек. На каждой скамейке сидело y мальчиков и одна девочка. Тогда $x = y + 1$; следовательно было $x(y + 1) = x^2$ человек. Поскольку $8^2 < 70 < x^2 < 90 < 10^2$, то $x = 9$ и $y = 8$. Значит, было 81 школьников, которые сидели на 9 скамейках.

№ 101

Указание. $1 : \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{12}{25}$.

№ 102

Указание. Имение следует разделить между сыном, женой и дочерью пропорционально числам 4 : 2 : 1.

№ 103

Ответ: 3 куропатки, 5 голубей, 22 воробья.

№ 104

Решение. Продолжим стороны угла A; при этом квадрат $FNME$ разобьется на 4 равных четырехугольника. Значит, площадь общей части равна $\frac{1}{4}$ площади квадрата $FNME$. Результат не зависит от того отношения, в котором AB делит FN. Он не зависит также и от размеров квадрата; нужно только, чтобы $AB \geq MF/2$.

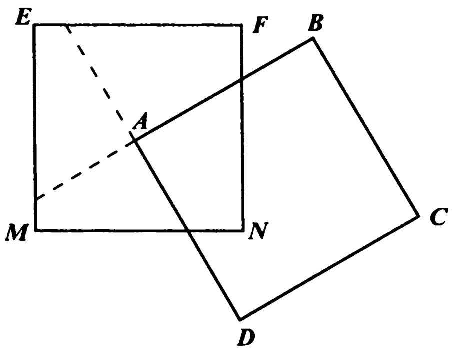


Рис. 42

№ 105

Решение. Воспользуемся формулой $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$, которую будем применять столько раз, пока все члены искомой суммы не станут различными:

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}+\frac{1}{31}+\frac{1}{930}.$$

№ 1

Решение. Так как $xy - x - y - 4 = 0$, то $(x - 1)(y - 1) = 5$. Поскольку $5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = (-5) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-5)$, то получим четыре системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x-1=5, \\ y-1=1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=5, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-1=-5, \\ y-1=-1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-5. \end{cases}$

Откуда находим четыре пары (6; 2), (2; 6), (–4; 0), (0; –4).

№ 2

Решение. Всего было сыграно $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ матчей. Если бы они все закончились победой одной из команд, то сумма очков, набранных всеми командами, была бы равна $21 \cdot 3 = 63$. Но из условия задачи следует, что общая сумма набранных очков равна 58. Поскольку при каждой ничье всего командам присуждается по одному очку, то из трех очков при ничье теряется одно. Но всего потерянных очков в турнире будет $63 - 58 = 5$. Значит, 5 матчей закончились вничью.

№ 3

Ответ: $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

№ 4

Указание. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Тогда сумма равна $1 - \frac{1}{2007} = \frac{2006}{2007}$.

№ 5

Решение. Пусть было x галок и y палок, тогда, согласно условию задачи имеем $5y + 1 = x$ и $6(y - 1) = x$.

Следовательно, $5y + 1 = 6y - 6$, откуда $y = 7$, значит, $x = 5 \cdot 7 + 1 = 36$, т.е. было 36 галок и 7 палок.

№ 6

Решение. Нельзя. Первоначально включено четное число переключателей (в точности 0), за одну операцию количество включенных переключателей изменяется на четное число. Следовательно, за любое число операций можно изменить, количество включенных переключателей лишь на четное число, а 2007 — нечетное.

№ 7

Решение. Не существуют, так как если произведение нескольких натуральных чисел нечетно, то все эти числа нечетны, а сумма четырех нечетных чисел четна.

№ 8

Решение. Нет. Допустим, что каждый из учеников получил нечетное количество записок. Так как всего учеников 27 — нечетно, то всеми учениками вместе получено нечетное число записок (сумма нечетного числа нечетных чисел — нечетна). С другой стороны, количество полученных записок равно количеству написанных, т.е. $27 \cdot 2 = 54$. Но 54 — четное число. Противоречие.

№ 9

Ответ: 100.

№ 10

Указание. $\overline{ab} + \overline{ba} = n^2$, или $11(a + b) = n^2$, откуда находим 4 пары: (9; 2), (8; 3), (7; 4), (6; 5). Им отвечают 8 чисел: 92; 29; 83; 38; 74; 47; 65; 56.

№ 11

Ответ: $87130 + 8213 = 95343$.

№ 12

Указание. Пусть $\frac{1}{7}=x$, $\frac{1}{19}=y$, тогда

$5\frac{1}{7}=5+x,\ 4\frac{1}{19}=4+y,\ 1\frac{6}{7}=2-x,\ 9\frac{8}{19}=10-y.$

В результате упрощений получим $7y$, т.е. $7\cdot\frac{1}{19}=\frac{7}{19}$.

№ 13

Решение. Очевидно, что всего трехзначных чисел 900. Разобьем их на семерки последовательных чисел вида (100, 101, ..., 106), (107, 108, ..., 113), (114, 115, ...,120), ... (996, 997, 998, 999). Далее заметим, что в каждом из этих семерок имеется лишь одно, а именно, первое число, которое при делении на 7 дает в остатке 2, так как $100 = 7\cdot14 + 2$, $107 = 7\cdot15 + 2$, $114 = 7\cdot16 + 2$, ..., $996 = 7\cdot142 + 2$. Но последняя семерка является неполной, поэтому число искомых чисел, удовлетворяющих условию задачи, будет равно: $900 = 128\cdot7 + 4$, т.е. всего 128 трехзначных чисел.

№ 14

Решение. Определим последнюю цифру 7^{19}, для чего возведем 7 последовательно в степень и будем находить только последнюю цифру степени:

$7^1 = 7,\quad 7^2 = \ldots\boxed{9},\quad 7^3 = \ldots\boxed{3},$

$7^4 = \ldots\boxed{1},\quad 7^5 = \ldots\boxed{7},\quad 7^6 = \ldots\boxed{9}$ и т.д.

И вообще, $7^{4x+3} = \ldots\boxed{3}$.

Цифру в прямоугольнике будем считать последнюю цифру степени.

Итак, 7^{19} оканчивается цифрой 3.

Аналогично находим, что $(7^{19})^{19}$ оканчивается цифрой 7, $((7^{19})^{19})^{19}$ — цифрой 3. Таким образом, нечетное число возведений в степень оканчивается цифрой 3, а четное — цифрой 7, а так как 2007 — нечетное число, то искомое число оканчивается цифрой 3.

№ 15

Ответ: Единственное число 169.

№ 16

Указание. Использовать неравенства треугольника. Длина третьей стороны 14 см.

№ 17

Решение. Пусть в квадрате $ABCD$ $\angle MDN = \angle NDC = \alpha$ (DN — биссектриса $\angle MDC$), $AM = x$, $CN = y$, $DM = z$. Нам надо доказать, что $z = x + y$.

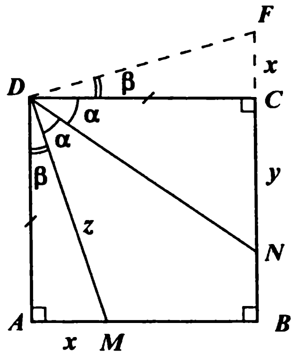


Рис. 43

На продолжении стороны BC отложим отрезок $CF = x$ и соединим точки F и D. Заметим, что $\Delta ADM = \Delta DCF$ (по двум катетам). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ADM = \angle FDC = \beta$ и $DM = DF = z$. Тогда $\angle ADN = \angle FDN = \beta + \alpha$.

Так как $\angle CDN = \alpha$, то $\beta + \alpha = 90° - \alpha = \angle CND$. Выходит, что $\angle FDN = \angle FND$, т.е. $\Delta\, FDN$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Значит, $DF = FN$, или $z = x + y$, что и требовалось доказать.

№ 18

Указание. Пусть x, y, u, v — количество денег соответственно I, II, III и IV братьев. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + u + v = 32000, \\ x + 7 = y - 7 = 7u = \dfrac{v}{7}. \end{cases}$$

Решая полученную систему заменой $x + y = y - 7 = 7u = \dfrac{v}{7} = t$, находим $x = 3493$; $y = 3507$; $u = 500$; $v = 24500$.

№ 19

Ответ: $\sqrt{52}$.

№ 20

Ответ: ПАРК = 1790.

№ 21

Ответ: $(x^2 + 2x)^2 + (x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 4)^2$.

№ 22

Решение:

100 мышей за 100 дней — 200 кг крупы;
100 мышей за 10 дней — 20 кг крупы;
10 мышей за 10 дней — 2 кг крупы.

№ 23

Решение.

$$x^8 + x + 1 = (x^8 + x^7 + x^6) - (x^7 + x^6 + x^5) +$$
$$+ (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) =$$
$$= x^6(x^2 + x + 1) - x^5(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) -$$
$$- x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) =$$
$$= (x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$$

№ 24

Ответ: 100°; 80°.

№ 25

Решение. $2^{2^2} = 2^4 = 16 \Rightarrow 22^2 > 2^{2^2}$;

$2^{22} = 2^4 \cdot 2^{18} = 16 \cdot 2^{18} > 2^{2^2}$;

$2^{22} = 2^9 \cdot 2^{13} = 512 \cdot 2^{13} > 22^2$, так как $22^2 = 484$.

Итак, $2^{22} > 22^2 > 2^{2^2}$.

№ 26

Ответ: 90°.

№ 27

Ответ: 45 и 90.

№ 28

Указание. Записать уравнение в виде

$$(a-3)(a+3)x = (7a+1)(a-3).$$

Тогда при $a = 3$, $x \in R$;

при $a = -3$, корней нет;

при $a \neq \pm 3$, $x = \dfrac{7a+1}{a+3}$.

№ 29

Ответ: при $a = 1$.

№ 30

Указание. Заменой $\dfrac{1}{x-2y} = a$, $\dfrac{1}{3x+2y} = b$ исходная система примет вид

$$\begin{cases} 8a + 20b = 3, \\ 12a - 40b = 1. \end{cases}$$

Далее, уравнивая коэффициенты при b решаем систему сложением, откуда находим $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{20}$, а затем, учитывая замену, находим $x = 6$, $y = 2$.

№ 31

Указание. График состоит из двух прямых: $x = -3$; $y = 2$ (см. рис. 44).

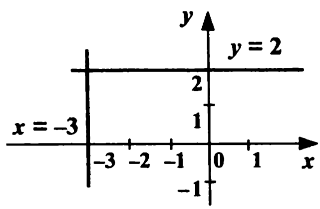


Рис. 44

№ 32

Указание.

Пусть x — I слагаемое, y — II слагаемое. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{7}x = \frac{1}{9}y, \\ x + y = 128, \end{cases}$$

откуда находим $x = 56$, $y = 72$. Следовательно, $128 = 56 + 72$.

№ 33

Ответ: $x_{1,2} = \pm 2{,}5$.

№ 34

Решение. Так как $ABCD$ — трапеция, то $AD \| BC$. Тогда $\angle CAD = \angle ACB$ — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Но AC — биссектриса $\angle A$, т.е. $\angle CAD = \angle BAC$. Выходит, что $\angle CAD = \angle ACB = \angle BAC$, значит, ΔABC — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

№ 35

Решение. На рисунке изображен график линейной функции $y = kx + b$. Из рисунка видно, что при $x = 0$, $y = 4$, т.е. $b = 4$. Кроме того, при $x = 1$, $y = 1$, тогда $1 = k \cdot 1 + 4$, откуда $k = -3$. Значит, линейная функция имеет вид $y = -3x + 4$.

№ 36

Решение. Заметим, что $n^3 + 17n = (n^3 - n) + 18n =$
$= (n - 1)n(n + 1) + 18n$.

$(n - 1)n(n + 1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, которое делится на 6, из которых хотя бы одно четно, а значит, делится на 2 и есть одно, которое делится на 3. Следовательно, $n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном n.

№ 37

Решение. $x^2 + xy + y^2 = \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}x^2\right) + \frac{3}{4}y^2 =$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0.$$

№ 38

Указание. Вначале сократить дроби. Тогда получим:

$$(6 + 5)(6 - 5) = 11 \cdot 1 = 11.$$

№ 39

Ответ: на 96%.

№ 40

Указание. Пусть x — цифра десятков, y — цифра единиц. Тогда, согласно условию, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 11, \\ 10x + y + 27 = 10y + x, \end{cases}$$

откуда находим $x = 4$, $y = 7$, т.е. искомое число 47.

№ 41

Ответ: $\dfrac{n-1}{2m-1}$.

№ 42

Ответ: $x = -4$.

№ 43

Решение. Каждое из уравнений системы является линейной функцией. Как видно из рисунка, графики этих функций совпадают. Каждую точку графика можно рассматривать как общую точку обеих прямых. Это означает, что исходная система уравнений имеет бесконечное множество решений. Выразим x через y (из любого уравнения системы):

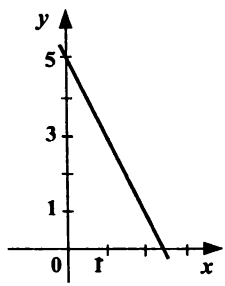


Рис. 45

$x = \dfrac{1}{2}(5 - y)$, тогда решением системы будет любая пара чисел вида $\left(\dfrac{5-m}{2}; m\right)$, $m \in R$.

№ 44

Указание. Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}, \\ 8\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+7\cdot\dfrac{1}{y}=1, \end{cases}$$

где x — количество дней, за которое может убрать весь урожай I бригада, y — количество дней, за которое может убрать весь урожай II бригада, т.е. II бригада весь урожай уберет на 7 дней быстрее I.

№ 45

Ответ: $x_1=-1{,}2$; $x_2=2$.

№ 46

Ответ: 100°.

№ 47

Ответ: 30°.

№ 48

Решение.

1) $\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0, \\ y+\dfrac{y}{2}=\dfrac{x}{2}+x, \end{cases}$

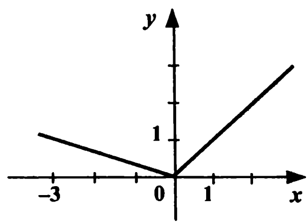


Рис. 46

$\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0, \\ 2y+y=x+2x, \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0, \\ x=y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x>0, y<0, \\ y-\dfrac{y}{2}=\dfrac{x}{2}+x, \end{cases}$ $\begin{cases} x>0; y<0, \\ y=3x. \end{cases}$

Случай 2) невозможен.

3) $\begin{cases} x<0; y<0, \\ y-\dfrac{y}{2}=\dfrac{x}{2}-x, \end{cases}$ $\begin{cases} x<0; y<0, \\ y=-x. \end{cases}$

Случай 3) невозможен.

4) $\begin{cases} x<0; y>0, \\ y+\dfrac{y}{2}=\dfrac{x}{2}-x, \end{cases}$ $\begin{cases} x<0; y>0, \\ y=-\dfrac{1}{3}x. \end{cases}$

№ 49

Решение. Пусть $\overline{xy}=10x+y$ — двузначное число, где x — цифра десятков, y — единиц. Если между цифрами вписать нуль, то получим трехзначное число вида $\overline{xoy}=100x+y$.

Согласно условию получим уравнение

$$100x + y = 9(10x + y), \text{ или } 5x = 4y,$$

откуда $y = 5$; $x = 4$ — единственная пара возможных чисел. Итак, искомое число 45, так как $405 = 9 \cdot 45$.

№ 50

Указание. Согласно условию имеем: $10a + b = (a + b)^2$, или $9a = (a + b)(a + b - 1)$. Далее учесть, что в правой части произведение двух последовательных целых чисел, откуда $a = 8$ и $a + b = 9$, т.е. $b = 1$, и, искомое число $81 = (8 + 1)^2$.

№ 51

Решение. Поскольку, 3 точки не лежат на одной прямой (по условию), то задача имеет 3 решения (средние линии треугольника, определяемые данными точками).

№ 52

Решение. Пусть в ΔABC ($\angle C=90°$), $BC = a$, $AB - AC = b$. Продолжим AC и отложим на продолжении отрезок $CD = b$.

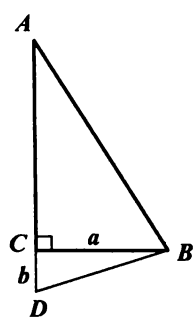


Рис. 47

В ΔABD $AD = AC + CD = AC + b = AB$. ΔABD, следовательно, и искомый ΔABC можно построить после построения ΔDBC, а ΔDBC можно построить по катетам a и b (рис. 47).

№ 53

Ответ:
$$\begin{array}{r} 3930 \\ +\,3980 \\ \hline 7910 \end{array}$$

№ 54

Указание. Например, при $n = 5$ получим:
$2^5 + 3 = 32 + 3 = 35 = 5 \cdot 7$ — составное число.

№ 55

Решение. Заметим, что если число оканчивается цифрой 4, то четная степень его оканчивается цифрой 6, а нечетная — цифрой 4. Следовательно, одно из первых двух слагаемых оканчивается четверкой, а другое — шестеркой. Третье слагаемое оканчивается на 6, значит, десятичная запись суммы оканчивается на 6.

№ 56

Указание. Размеры прямоугольника 5×6. Перебрать все возможные случаи.

№ 57

Решение. Допустим, что такие две группы существуют. Тогда в одной группе будет нечетное число слагаемых, а в другой — четное. Заметим, что сумма чисел в одной группе будет нечетной, а в другой — четной. Получили противоречие.

№ 58

Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=1.$

№ 59

Решение. При $x = 10$ значение выражения равно
$3^{2^{1^{19^{18}}}} = 3^{2^1} = 3^2 = 9.$

№ 60

Указание. $x - 4 = 0; \pm 1$, откуда $x = 4$; $x = 5$; $x = 3$.

№ 61

Решение. Пусть $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ — трехзначное число, где a — цифра сотен, b — десятков, c — единиц. Согласно условию,

$$100a + 10b + c = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} = 22(a + b + c)$$

или $26a = 4b + 7c$.

Очевидно, что наименьшее трехзначное число начинается с $a = 1$, тогда $4b + 7c = 26$. Полученное уравнение имеет единственное решение в целых числах: $b = 3$, $c = 2$, тогда искомое число — 132.

№ 62

Решение (см. рис. 48).
D: $x \neq 4$

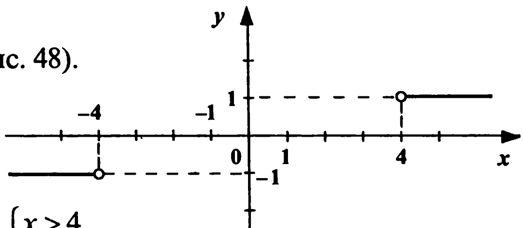


Рис. 48

1) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4, \\ y = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ y = -1, \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4, \\ y = -1. \end{cases}$

№ 63

Решение. Если количество нечетных чисел нечетно, то можно стереть любое из них. Если же количество чисел четно, то, очевидно, на доске есть хотя бы одно четное число (всего чисел 2007); его и стираем. Если же на доске написаны 2006 нечетных чисел, то при стирании любого из них, сумма оставшихся будет нечетна.

№ 64

Решение. $1 + 13 + 13^2 + \ldots + 13^{2006} + 13^{2007} =$
$= (1 + 13) + 13^2(1 + 13) + 13^4(1 + 13) + \ldots$
$+ 13^{2005}(1 + 13) + 13^{2007} =$
$= 14(1 + 13^2 + 13^4 + \ldots + 13^{2005}) + 13^{2007}$ —
не делится на 7, ч. т. д.

№ 65

Указание. Провести диагонали прямоугольника и использовать теорему о средней линии треугольника.

№ 66

Решение. $(2n + 3)^2 = 4n^2 + 12n + 9 = (4n(n + 3) + 8) + 1$. Так как слагаемое в скобке делится на 8, то доказываемое очевидно.

№ 67

Ответ: $(a + b)^2 + (a - b)^2 + (a + c)^2 + (a - c)^2 +$
$+ (b + c)^2 + (b - c)^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$.

№ 68

Решение (см. рис. 49).

$\angle B + \angle C = 180° - 60° = 120°.$

$\angle OBC + \angle OCB =$

$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 60°.$

Тогда $\angle BOC = 180° - 60° = 120°.$

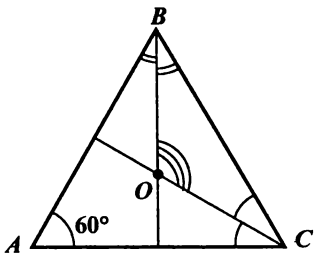


Рис. 49

№ 69

Указание. Дополнить данный угол до прямого. Тогда получим угол 90° – 54° = 36°, половина которого является третьей частью данного угла, так как 36° : 2 = 54° : 3 = 18°.

№ 70

Решение.

$3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 + y^2 = 3x^4 + 3x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2y^4 + y^2 =$
$= 3x^2(x^2 + y^2) + 2y^2(x^2 + y^2) + y^2 = 3x^2 \cdot 1 + 2y^2 \cdot 1 + y^2 =$
$= 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2) = 3.$

№ 71

Указание. $(10a + b) - (a + b) = x^2$,

или $a = \left(\frac{x}{3}\right)^2$, где $0 < a \le 9$.

Удовлетворяют значения $x = 3; 6; 9$, тогда $a = 1; 4; 9$, откуда каждому значению a соответствует 10 чисел, т.е. всего 30 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

№ 72

Решение. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Заметим, что $p - 1$ и $p + 1$ — четные, поскольку число p — нечетное. Из двух последовательных четных чисел одно делится на 2, другое — на 4, поэтому $p^2 - 1$ делится на 8. Кроме того, $p - 1$ и $p + 1$ делится на 3, так как эти числа вместе с p составляют три последовательных целых числа, а p на 3 согласно условию, не делится. Значит, $p^2 - 1$ делится на 24.

№ 73

Указание. $A = (2n + 1)^2 - (2k + 1)^2$ при $n > k$. $A = 2(n - k) \cdot 2(n + k + 1) = 4(n - k)(n + k + 1)$, но из чисел $n - k$ и $n + k + 1$ одно обязательно — четное.

№ 74

Решение. Если число $\overline{5678xy}$ делится на 24, то оно будет делиться на 8 и на 3. Если число $\overline{5678xy}$ делится на 8, то $\overline{8xy}$ делится на 8, т.е. $800 + 10x + y = 8p$. (1)

Чтобы $\overline{5678xy}$ делилось на 3, достаточно, чтобы сумма $5 + 6 + 7 + 8 + x + y$ делилась на 3, т.е. $26 + x + y = 3q$. (2)

Заметим, что $0 \le x + y \le 18$, т.е. $0 \le 3q - 26 \le 18$, или $8\frac{2}{3} \le q \le 14\frac{2}{3}$, значит, $q = 9, 10, 11, 12, 13, 14$.

Вычитая из (1) – (2), получим:

$774 + 9x = 8p - 3q$, откуда $p = 96 + x + \dfrac{x + 3q + 6}{8}$.

Чтобы p было целым, необходимо, чтобы $x + 3q + 6$ делилось на 8.

Если $q = 9$, то $x = 7$; если $q = 10$, то $x = 4$;
если $q = 11$, то $x = 1$ или $x = 9$;
если $q = 12$, то $x = 6$; если $q = 13$, $x = 3$;
если $q = 14$, $x = 0$ или $x = 8$.
Из (2) $\Rightarrow$ $y = 3q - 26 - x$.

При найденных значения q и x, находим числа 567840, 567816, 567864, 567808, из которых условию задачи удовлетворяют лишь первые 3 числа: 567840; 567816; 567864.

№ 75

Указание. По условию $10a + b = a^2 + ab + b^2$,
или $a(9 + b) = (a + b)(a + b - 1)$, где $1 \le b \le 9$.

В итоге получим три числа, удовлетворяющие условию: 91; 13 и 63.

№ 76

Решение (см. рис. 50).

Графики данной системы уравнений параллельны и не совпадают, т.е. система не имеет решений, так как два уравнения системы не могут выполняться одновременно (из I уравнения $x + 3y = 1$, а из II $x + 3y = \frac{5}{3}$).

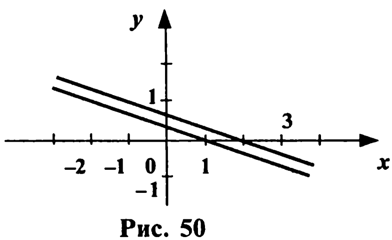


Рис. 50

№ 77

Ответ: 24.

№ 78

Ответ: при $k = 0{,}5$.

№ 79

Ответ: $x = \frac{1}{14}$.

№ 80

Ответ: $\frac{1}{7}$.

№ 81

Указание. $(x - 1) + x + (x + 1) = 111$, откуда $x = 37$; $x - 1 = 36$; $x + 1 = 38$, т.е. искомые числа 36, 37 и 38.

№ 82

Указание. Пусть x л — емкость канистры, тогда

$$(x - 10) - 0{,}1x = 26, \text{ откуда } x = 40.$$

Значит, емкость канистры 40 л.

№ 83

Указание. Сумма двух и более неотрицательных выражений равна нулю одновременно, если каждое из них равно нулю.

Тогда $x - 4y = 0$; $y + 1 = 0$; $x + y + z = 0$, откуда $x = -5$; $y = -1$; $z = 6$.

№ 84.

Указание. Нет, так как при $n = 4$ получим:
$2^9 - 1 = 511 = 7 \cdot 73$ — составное.

№ 85

Ответ: $x > y$.

№ 86

Решение. $28m + 98n = 5(3m + 4n) + 13(m + 6n)$. Поскольку $3m + 4n$ делится на 13 (по условию) и 13 $(m + 6n)$ делится на 13 $\Rightarrow$ $28m + 98n$ делится на 13.

№ 87

Ответ: Можно. $1000000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$.

№ 88

Решение. $\angle 2 = \angle 1 - (50° + 2x - 2y) =$

$= 70° + x - y - 50° - 2x + 2y = 20° - x + y$,

тогда $\angle 1 + \angle 2 = 70° + x - y + (20° - x + y) = 90°$.

Значит, $\angle MBN = 180° - (\angle 1 + \angle 2) = 90°$, т.е. $MB \perp BN$, ч. т. д.

№ 89

Ответ: 72.

№ 90

Указание. $(a + b)^2 = 10b + a$, или $(a + b)(a + b - 1) = 9b \Rightarrow$ $\Rightarrow b = 8$, тогда $a = 1$ и 18 — единственное число.

№ 91

Решение. Согласно условию $x = a^2 + a^3$, где $100 \le x < 1000$, a — целое число. Поскольку x — трехзначное число, то $4 < a < 10$, тогда $x = a^2 (1 + a)$, и, так как x кратно 7, тогда a^2 или $1 + a$ кратно 7.

Если $a = 6$, то $x = 6^2 (1 + 6) = 252$ — кратно 7.

Если $a = 7$, то $x = 7^2 (1 + 7) = 392$ — кратно 7.

Итак, искомые числа 252 и 392.

№ 92

Решение.

$a^2 + 9ab + b^2 = 7ab + (a^2 + 2ab + b^2) = 7ab + (a + b)^2$.

Значит $(a + b)^2$ делится на 7, но 7 — простое число, тогда $a + b$ делится на 7, ч. т. д.

№ 93

Решение.

$c = 2 - (-9 + 7) = 4;$

$a + b = 13 - 4 = 9;$

$t = 11 - (a + b) = 2.$

№ 94

Указание.

Если $x \geq 0$, то $y = x - 2$;

если $x < 0$, то $y = -x - 2$;

Строим график (см. рис. 51).

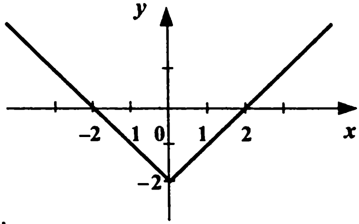


Рис. 51

№ 95

Решение. $x^5 - 1 = x^5 - x^2 + x^2 - 1 =$

$= x^2 (x^3 - 1) + (x^2 - 1) =$

$= x^2 (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x + 1) =$

$= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$

Замечание. Разложить на множители можно другими способами.

№ 96

Ответ: $a = 1$; $a = 3$.

№ 97

Решение. Пусть $a + 1 = t$,

тогда $4a(a + 2) = 4 (a + 1)^2 - 4 = 4t^2 - 4$.

Значит, $(a + 1)^4 + 4 (a + 1)^3 + 4a (a + 2) =$

$= t^4 + 4t^3 + 4t^2 - 4 = t^2(t^2 + 4t + 4) - 4 =$

$= t^2 (t + 2)^2 - 2^2 = (t^2 + 2t)^2 - 2^2 =$

$= (t^2 + 2t + 2)(t^2 + 2t - 2) =$

$= ((a + 1)^2 + 2 (a + 1) + 2)((a + 1)^2 + 2 (a + 1) - 2) =$

$= (a^2 + 4a + 5)(a^2 + 4a + 1).$

№ 98

Ответ: квадрат с вершинами в точках $A(0; 2)$, $B(0; -2)$, $C(2; 0)$, $D(-2; 0)$.

№ 99

Решение. Если $x = 1$ заданное уравнение имеет вид:

$$3 - a - 7 + b = 0 \text{ или } -a + b = 0.$$

Аналогично, при $x = -2$ получим $-4a + b = 0$. Для нахождения значений a и b остается решить систему двух уравнений

$$\begin{cases} -a+b=4, \\ -4a+b=10. \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения II, находим: $a = -2$; $b = 2$.

№ 100

Решение. По условию $MK = KS$, значит, $\Delta\, MKS$ — равнобедренный, тогда $\angle M = \angle MSK = 35°$. Аналогично в $\Delta\, SPN$ $\angle PSN = 25°$. В $\Delta\, MSN$ $\angle MSN = 180° - (35° + 25°) = 120°$. Следовательно, $\angle KSP = \angle MSN - (\angle MSK + \angle PSN) = 60°$.

№ 101

Указание. Искомые дроби имеют вид $\frac{x}{y}, \frac{2x}{3y}, \frac{5x}{7y}$.

Согласно условию $\left(\frac{x}{y}+\frac{2x}{3y}+\frac{5x}{7y}\right):3=\frac{200}{441}$, откуда находим $\frac{x}{y}=\frac{4}{7}$, $\frac{2x}{3y}=\frac{8}{21}$ и $\frac{5x}{7y}=\frac{20}{49}$.

№ 102

Решение. Пусть I четное число $2k$, тогда II четное число $(2k + 2)$, а их произведение равно $2k\,(2k + 2) = 4k\,(k + 1)$ — кратно 8, так как $k\,(k + 1)$ — произведение двух последовательных чисел, из которых одно четное, а другое — нечетное.

№ 103

Указание. Учесть, что $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) < (x + 2)^4$; $x\,(x + 1)(x + 2)(x + 3) > (x + 1)^4$. Искомые числа: 5; 6; 7; 8.

№ 104

Указание. Прибавить и вычесть $4a^2$.

№ 105

Указание. Всякое трехзначное число с одинаковыми цифрами имеет вид $\overline{aaa} = 111a = 37 \cdot 3a$ — кратно 37.

№ 106

Указание. Умножить числитель и знаменатель дроби на $x^2 - y^2$. Тогда, после преобразований получим $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{(x-y)^2}$.

№ 107

Ответ: нет корней (см. рис. 52).

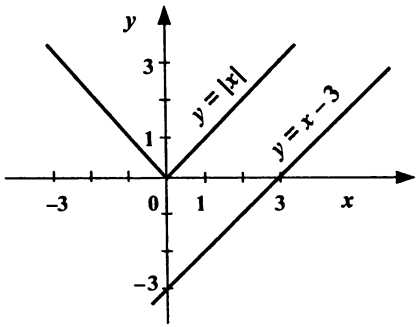


Рис. 52

№ 108

Решение. $a^2 + ab + b^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{2ab}{2} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{a^2+b^2}{2} =$

$$= \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} \geq 0.$$

№ 109

Ответ: $(a^2 + a - 1)(a^2 - a - 1)$.

№ 110

Указание. $|x|^2 = x^2$, тогда получим после преобразований уравнение $x^2(x - 13) = 0$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = 13$.

№ 111

Решение. Пусть x — глубина ямы, y — высота выступания его головы над копаемой ямой, в момент, когда яма вырыта на половину $\frac{x}{2}+y=180$; $x-y=180$. Решая систему, находим $x=\frac{360\cdot 2}{3}=240$, то есть глубина ямы 2 м 40 см.

№ 112

Решение. Для нумерации страниц от 1 до 9, понадобится

$1\cdot 9=9$ цифр.

Для нумерации страниц от 10 до 99, необходимо

$2\cdot 90=180$ цифр.

Для нумерации от 100 до 999, необходимо будет

$3\cdot 900=2700$ цифр.

Следовательно, чтобы пронумеровать страницы от 1 до 999 необходимо будет $9+180+2700=2889$ цифр.

Остаток $3289-2889=400$ цифр использовались для нумерации следующих страниц, начиная со страницы 1000. Этих страниц было $400:4=100$.

Значит, всего в книге будет $999+100=1099$ страниц.

№ 113

Решение. Так как $AC=BC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный (по определению); $CD=DB$ (по условию).

Пусть $AC=2x$; $CD=DB=x$, $AB=8$ м.

Тогда $P_1=3x+AD$; $P_2=8+AD+x$.

Согласно условию $P_1-P_2=2$ м, значит

$$3x+AD-(8+AD+x)=2, \text{ или } 2x-8=2,$$

откуда $2x=10$, т.е. $AC=BC=10$ м.

№ 114

Ответ: можно (см. рис. 53).

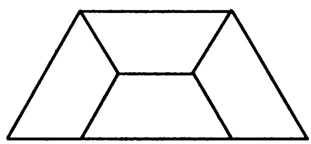


Рис. 53

№ 115

Решение. Заметим, что искомое число при делении 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 должно давать в остатке делитель, уменьшенный на единицу. Следовательно, искомое число равно наименьшему общему кратному чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 уменьшенному на 1, т.е. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 2519$.

№ 116

Указание. $4x - x = 37 - 7$, $x = 10$. Значит, сыну 10 лет.

№ 117

Ответ: точки прямых $x = 0$ или $y = 3$ (см. рис. 54).

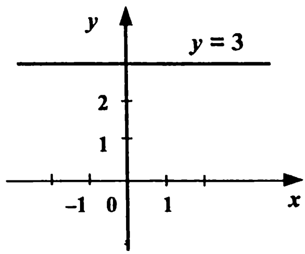


Рис. 54

№ 118

Решение. Разложив левую часть уравнения на множители, получим:

$$4m^2(n-1) - (n-1) = 57.$$

или $$(2m-1)(2m+1)(n-1) = 57 = 1 \cdot 3 \cdot 19.$$

Это равенство в области натуральных чисел выполняется, если $m = 1$, $n = 20$.

№ 119

Решение. Перемножив левые и правые части данных равенств, получим:

$2007zu(x + y) = 2007zy(z + y)$ или, разделив обе части на $2007z \neq 0$, имеем $u(x + y) = y(z + u)$ или $ux = yz$, откуда $\dfrac{x}{z} = \dfrac{y}{u}$.

№ 120

Решение. Упростим левую часть данного равенства, учитывая, что $a + b = 1$.

Имеем:

$$\frac{a^2}{b^2-1}-\frac{b^2}{a^2-1}=\frac{a^4-b^4-a^2+b^2}{(a^2-1)(b^2-1)}=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)}{(a^2-1)(b^2-1)}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2-1)}{a^2b^2-(a^2+b^2)+1}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)((a+b)^2-2ab-1)}{a^2b^2-((a+b)^2-2ab-1)}=\frac{(a-b)\cdot 1(1-2ab-1)}{a^2b^2-(1-2ab-1)}=$$

$$=\frac{(a-b)\cdot(-2ab)}{a^2b^2+2ab}=\frac{2ab(b-a)}{ab(ab+2)}=\frac{2(b-a)}{ab+2},$$

что и требовалось доказать.

№ 121

Указание. На отрезке BD стороны BA строим равносторонний ΔBED, тогда $\angle CBE = \frac{1}{3}\angle CBA = 30°$. Остается разделить пополам $\angle DBE$.

№ 122

Указание. $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$.

№ 123

Указание. Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} x+7=5(y-7), \\ y+5=7(x-5), \end{cases}$$

откуда находим: $x=7\frac{2}{17}$, $y=9\frac{14}{17}$.

№ 124

Указание. Если только 19 учеников достигли 13 лет, то общая сумма возрастов не более $13 \cdot 19 + 12 \cdot 14$, т.е. меньше 430 лет.

№ 125

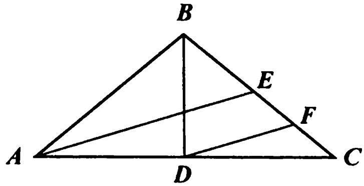


Рис. 55

Решение.

$\angle C = (180° - 108°) : 2 = 36°$;

$\angle DBC = 108° : 2 = 54°$.

Проведем $DF \| AE$, тогда

$\angle CAE = 36° : 2 = 18°$;

$\angle BDF = 90° - 18° = 72°$;

$\angle DFB = 180° - (72° + 54°) = 54°$;

$BD = DF = \frac{1}{2}AE$, тогда $BD : AE = 1 : 2$.

№ 126

Ответ: 0.

№ 127

Ответ: такой треугольник не существует.

№ 128

Решение. Пусть $x = 100 - a$, $y = 1 + b$. При таких подстановках данное уравнение примет наиболее простой вид:

$19(100 - a) + 15(1 + b) = 1915$, или $19a = 15b$.

Но $(19;15) = 1$, тогда $a = 15p$; $b = 19p$, $p \in Z$, значит,

$x = 100 - 15p$, $y = 1 + 19p$.

Следовательно, x и y будут одновременно натуральными, если $p = 0, 1, \ldots 6$.

Если $p = \overline{0,6}$, то последовательно получим пары чисел (100;1), (85;20), (70;39), (55;58), (40;77), (25;96), (10;115).

№ 129

Решение. $b = 9c - 3a$, тогда $100a + 10b + c =$
$= 100a + 10(9c - 3a) + c = 70a + 91c = 7(10a + 13c)$ — делится на 7.

№ 130

Решение. Возможны 3 случая:

1) $x \le 0$, тогда каждый из одночленов будет неотрицателен, значит, $x^{16} - x^{12} + x^8 - x + 1 \ge 1 > 0$;

2) $0 < x < 1$, тогда $x^{16} - x^{12} + x^8 - x + 1 =$
$= (1 - x) + x^8(1 - x^4) + x^{16} > 0$;

3) $x \geq 1$, тогда $x^{16} - x^{12} + x^8 - x + 1 =$
$= x^{12}(x^4 - 1) + x(x^7 - 1) + 1 \geq 1 > 0$.

№ 131

Решение (см. рис. 56).

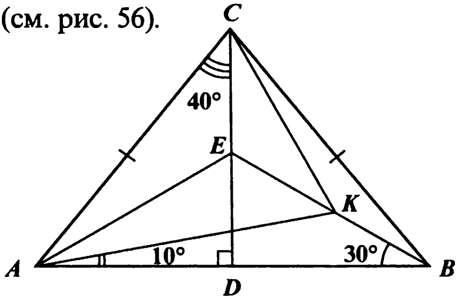


Рис. 56

Пусть E — точка пересечения высоты CD и прямой BK. Так как ΔABC — равнобедренный и CD — высота, проведенная к основанию AB, то $AE = BE$ и

$\angle EAK = \angle EAB - \angle KAB = 30° - 10° = 20°$,

$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB = 40°$,

$\angle EAC = \angle CAD - \angle EAB = (90° - 40°) - 30° = 20°$,

$\angle AKE = \angle KAB + \angle KBA = 10° + 30° = 40° \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta AEK = \Delta ACE$ (по стороне и прилежащим к ней углам) $\Rightarrow AK = AC$, $\angle AKC = \angle ACK = \frac{1}{2}(180° - \angle CAK) =$
$= \frac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$.

№ 132

Решение. Пусть x — число учеников, y — их средний возраст. Тогда $(y + 24)$ — возраст учителя, $xy + y + 24$ — сумма возрастов присутствующих в классе.

Значит, $\dfrac{xy+y+24}{x+1}=\dfrac{y(x+1)+24}{x+1}=y+\dfrac{24}{x+1}$ — средний возраст всех присутствующих в классе, который, с другой стороны равен $y+24-20=y+4$. Равенство $y+\dfrac{24}{x+1}=y+4$ дает значение $x = 5$. Значит, в классе присутствуют 5 учеников.

№ 133

Решение. Из условия следует, что указанные три месяца содержали всего 12 воскресений. А поскольку один из любых семи подряд идущих дней является воскресеньем, то эти месяцы насчитывали вместе меньше чем $13\cdot 7=91$ день. Остается заметить, что любые три подряд идущих месяца, среди которых нет февраля, насчитывают вместе не меньше чем 91 день.

№ 1

Решение. Однозначных чисел использовано 9, двузначных $90 \cdot 2$ цифр (двузначных цифр 90). Так как все трехзначные числа содержат $900 \cdot 3 = 2700$ цифр, а у нас неиспользованными осталось $1734 - 189 = 1545$ цифр, то эти 1545 цифр принадлежат трехзначным числам, которых $1545 : 3 = 515$. Итого страниц $9 + 90 + 515 = 614$.

№ 2

Решение. Пусть $n = 2006$, тогда $2005 = n - 1$, $2007 = n + 1$.

Пусть $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}$,

или $n - 1 + 2\sqrt{n^2 - 1} + n + 1 < 4n$,

или $2\sqrt{n^2 - 1} < 2n$, $\sqrt{n^2 - 1} < n$ — верно.

Значит, второе число больше первого.

№ 3

Решение. Заметим, что $p^2 + 9$ — нечетно, тогда p^2 и p — четные. Такое число единственное, т.е. $p = 2$.

№ 4

Решение. Последние две цифры квадратов могут оканчиваться:

а) для четных чисел на 00, 04, 16, 24, 36, 44, 56, 64, 76, 84, 96;

б) для нечетных чисел на 01, 09, 21, 25, 29, 41, 49, 61, 69, 87, 89.

Так как дискриминант $D = b^2 - 4ac = 2007$, то при $b \geq 45$ $b^2 - 2007 = 4ac$ не делится на 4, т.е. $D \neq 2007$.

№ 5

Ответ: 3.

№ 6

Указание. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

№ 7

Указание. При $x > 3$ имеем $y = 3$; при $x < 3$ получим $y = -1$.

№ 8

Решение. Масса «сухого вещества» арбуза составляет 1% первоначальной массы, или $12 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$ (кг). После того, как арбуз усох, масса «сухого вещества» составляла 2% от новой массы арбуза. Новая масса будет равна:

$$0{,}12 : 0{,}02 = 6 \text{ (кг)}.$$

После того как арбуз усох, его масса уменьшилась вдвое.

№ 9

Ответ: $(x^2 + x + 1)(x^7 - x + 1)$.

№ 10

Указание. Использовать теорему о средней линии треугольника.

№ 11

Ответ:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}325\\147\end{array} \\ \hline 2275 \\ +\;1300 \\ 325 \\ \hline 47775 \end{array}$$

№ 12

Решение. Пусть X и $У$ данные натуральные числа. Пусть $У < X$, тогда большее число $X = 10У + k$, где k — зачеркнутая цифра, причем, $0 \le k \le 9$. Согласно условию задачи имеем:

$$X + У = 10У + k + У = 11У + k.$$

Кроме того, $X + У = 2011$, тогда $11У + k = 2011$, следовательно, k — остаток от деления 2011 на 11, то есть, $k = 9$, тогда $11У + 9 = 2011$, $11У = 2002$, откуда $У = 182$ и $X = 1829$. Итак, искомые числа 1829 и 182.

№ 13

Ответ: 322.

№ 14

Указание. Учесть, что $x = 1$ не является корнем уравнения и привести его к виду $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 5\cdot\frac{x^2}{x-1} + 4 = 0$, откуда заменой $\frac{x^2}{x-1} = y$ получаем $y^2 - 5y + 4 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Решая полученные квадратные уравнения, находим $x = 2$ — единственный корень.

№ 15

Решение. Пусть x, y — катеты, z — гипотенуза. Пусть для определенности $x \geq y$. Согласно условию, имеем:

$\frac{1}{2}xy = x + y + z$, где $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (по теореме Пифагора),

тогда $\frac{1}{2}xy = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$,

или $xy - 2(x + y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. (1)

Возведем обе части (1) в квадрат:

$$x^2y^2 - 4xy(x+y) + 4(x+y)^2 = 4(x^2 + y^2),$$

или, упрощая, имеем: $xy(xy - 4(x+y) + 8) = 0$.

Так как $x > 0, y > 0$, то $xy \neq 0$,

тогда $xy - 4(x + y) + 8 = 0$, или $(x - 4)(y - 4) = 8$. (2)

Но $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, тогда из (2) имеем:

1) $\begin{cases} x-4=8 \\ y-4=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$, тогда $z = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

2) $\begin{cases} x-4=4 \\ y-4=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$, тогда $z = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Итак, существуют два прямоугольных треугольника, удовлетворяющих условию задачи: (12; 5; 13) и (8; 6; 10).

№ 16

Ответ: $\frac{2}{13}$.

№ 17

Ответ: –13.

№ 18

Указание. Использовать формулу:

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

№ 19

Ответ: составным.

№ 20

Указание. При решении задачи можно перейти к системе неравенств, равносильной заданному неравенству:

$$\begin{cases} y \le 3 - x, \\ y \ge -3 - x. \end{cases}$$

Искомым геометрическим местом точек является закрытая полоса, ограниченная прямыми $y = 3 - x$ и $y = -3 - x$ (рис. 57).

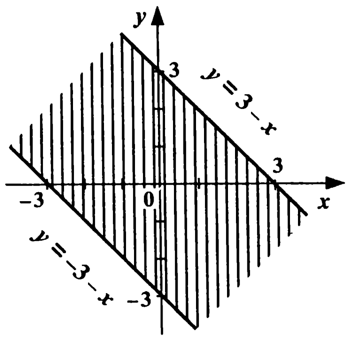


Рис. 57

№ 21

Ответ: $17^2 = 289$.

№ 22

Решение.

I способ. По условию $BCDE$ — трапеция, поэтому $S_{\Delta DEC} = S_{\Delta DBC}$ (рис. 58).

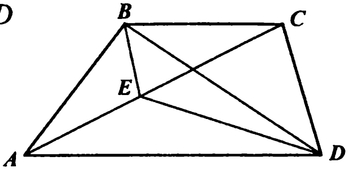


Рис. 58

Аналогично, в трапеции $ABCD$ имеем $S_{\Delta DBC} = S_{\Delta ABC}$. Следовательно, $S_{\Delta DEC} = S_{\Delta ABC}$.

II способ. Продолжим прямую BE до пересечения с AD в точке F (рис. 59).

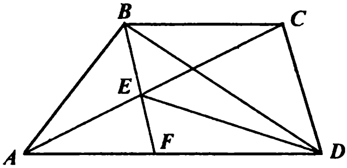


Рис. 59

Тогда площадь каждого из треугольников ABC и DEC равна половине площади параллелограмма $BCDF$ (общая сторона и высота). Следовательно, $S_{\Delta DEC} = S_{\Delta ABC}$

№ 23

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(x - 3y)(x^2 + 3\,xy + 9x^2) = 37 = 1 \cdot 37,$$

причем $x - 3y < x < x^2 + 3\,xy + 9y^2$, значит

$$\begin{cases} x - 3y = 1, \\ x^2 + 3xy + 9y^2 = 37. \end{cases}$$

Решая систему способом подстановки $x = 3y + 1$, получим квадратное уравнение $3y^2 + y - 4 = 0$, корни которого $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{4}{3}$ (не подходит, так как $x, y \in N$). Если $y = 1$, то $x = 4$, т.е. пара (4; 1) является решением исходного уравнения.

№ 24

Решение. На каждом из 5 мест в башне может стоять кубик одного из двух цветов, значит, различных башен будет $2^5 = 32 < 45$, т.е. по принципу Дирихле найдутся две одинаковые башни.

№ 25

Решение. Искомое шестизначное число имеет вид $1313xy$, где x — цифра десятков, y — единиц.

Кроме того, $10 \le \overline{xy} \le 99$.

Имеем: $1313xy = 131300 + \overline{xy} = 2477 \cdot 53 + (19 + \overline{xy})$.

Отсюда видно, что $19 + \overline{xy}$ кратно 53, если $\overline{xy} = 53 - 19 = 34$, или $\overline{xy} = 2 \cdot 53 - 19 = 87$. Итак, $x = 3$, $y = 4$, или $x = 8$, $y = 7$.

№ 26

Решение. Запишем данное уравнение в виде $y^2 = x^2(1 + x)$.

Чтобы y было числом целым при x целом, положим $1 + x = a^2$, тогда $x = a^2 - 1$ и $y = ax$, или $y = a(a^2 - 1)$. Итак, соотношения $x = a^2 - 1$ и $y = a(a^2 - 1)$ задают бесконечную серию решений.

№ 27

Решение.

$x^9 + 5x^5 + x^4 + 4x + 4 = (x^9 + x^5 + x^4) + (4x^5 + 4x + 4) =$
$= x^4(x^5 + x + 1) + 4(x^5 + x + 1) = (x^5 + x + 1)(x^4 + 4)$.

Но $x^5 + x + 1 = (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) =$
$= (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$
и $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Следовательно, $x^9 + 5x^5 + x^4 + 4x + 4 =$
$= (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

№ 28

Решение. Нет, так как вдоль стороны длиной 11 нельзя разместить прямоугольники со сторонами 5 и 8, и, число 11 не представимо в виде $5a + 8b$, где $a, b \ge 0$.

№ 29

Указание. $5 \cdot 8 \cdot 4 = 160$ способами.

№ 30

Решение. Пусть h — высота трапеции. Заметим, что $S_{\Delta DCB} = S_{\Delta ABC}$, так как основание BC и высота h у них общие, тогда $S_{ABCD} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ABC} = 32 + 13 = 45$ (м^2).

№ 31

Решение. Докажем методом от противного. Пусть число $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ — рационально, т.е.

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}=\frac{p}{q}\,(p,\ q\in Z).$$

Тогда $\sqrt{3}+\sqrt{7}=\frac{p}{q}-\sqrt{5}$. Возведем обе части этого равенства в квадрат: $10+2\sqrt{21}=\frac{p^2}{q^2}-\frac{2p\sqrt{5}}{q}+5$,

или $2\sqrt{21}+\frac{2p\sqrt{5}}{q}=\frac{p^2}{q^2}-5$,

или $\sqrt{21}+\frac{p}{q}\sqrt{5}=\frac{p^2}{2q^2}-2{,}5=\frac{p_1}{q_1}$.

Еще раз возведя в квадрат, получим

$$21+\frac{5p^2}{q^2}+\frac{2p}{q}\sqrt{105}=\frac{p_1^2}{q_1^2},$$

откуда $\sqrt{105}=\frac{q}{2p}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2}-\frac{5p^2}{q^2}-21\right)$, т.е. $\sqrt{105}$ — рациональное число, что неверно. Следовательно, число $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ — иррациональное.

№ 32

Решение. $24^{17}<25^{17}=(5^2)^{17}=5^{34}$;
$126^{12}>125^{12}=(5^3)^{12}=5^{36}$, отсюда $24^{17}<126^{12}$.

№ 33

Решение. Пусть в трапеции $KNML$ ($NM \| KL$) $KN=NM=ML=10$ дм, $\angle K=\angle L=60°$.

Заметим, что $\angle ONK+\angle OKN=90°$ и, так как $\angle OKN=30°$, то $\angle ONK=60°$.

Значит, $\angle ONM = \angle ONK = 60°$. Так как $ON = OM$ — как радиусы, то $\Delta\, ONM$ — равнобедренный, т.е. $\angle OMN = 60°$, но тогда $\angle NOM = 180° - (60° + 60°) = 60°$. Выходит, что $\Delta\, ONM$ — равносторонний и $MO = MN = 10$ дм.

№ 34

Решение. $5^{37} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{37\text{ раз}} = 5k$, т.е. кратно 5, где $k \in N$,

тогда $157^{5^{37}} - 1 = 157^{5k} - 1 = (157^k)^5 - 1 =$
$= (157^k - 1)(157^{4k} + 157^{3k} + 157^{2k} + 157^k + 1)$.

Поскольку $157^k - 1$ делится на разность оснований, т.е. на $157 - 1 = 156 = 13 \cdot 12$, то и данное число делится на 13.

№ 35

Ответ: график изображен на рисунке 60.

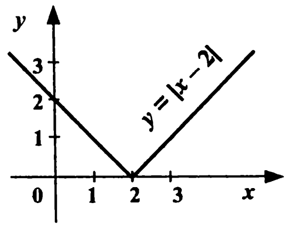


Рис. 60

№ 36

Указание. Показать, что $S_{ABCD} = S_{\Delta AMD} = 33$ см^2.

№ 37

Решение. Если a — нечетное число, то и a^2 — нечетное, тогда $a^2 + b$ будет четным (так как b – нечетное). Значит $a^2 + b + 1$ — нечетное.

№ 38

Ответ: $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$.

№ 39

Указание. $\begin{cases} x(x^2 - 8x + 7) = 0, \\ 1 - x \neq 0. \end{cases}$

Решая уравнение $x\ (x^2 - 8x + 7) = 0$, находим, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 7$. Так как $x \neq 1$, то получим два корня: 0 и 7.

№ 40

Указание. $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, φ — угол между ними.

Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 48$ (м^2).

№ 41

Решение. $1 - |x| \neq 0$, т.е. $|x| \neq 1$, $x \neq \pm 1$. Тогда $1 - |x| = 3$, или $|x| = -2$ — нет корней, так как $|x| \geq 0$.

№ 42

Ответ: 8

№ 43

Решение. Возведем обе части данного равенства в квадрат, полагая, что $xy \neq 0$: $(x^3 - y^3)^2 = 4x^2y^2$,

или $(x^3 - y^3)^2 + 4x^3y^3 = 4x^2y^2 + 4x^3y^3$,

$(x^3 + y^3)^2 = 4x^2y^2(1 + xy)$, откуда $1 + xy = \left(\frac{x^3 + y^3}{2xy}\right)^2$, что и требовалось доказать.

№ 44

Ответ: 324.

№ 45

Указание. Заменой $6x^2 - 7x = y$, данное уравнение приводится к квадратному, корни которого $y_1 = 3$, $y_2 = -1$. Возвращаясь к замене, получим два квадратных уравнения $6x^2 - 7x - 3 = 0$ и $6x^2 - 7x + 1 = 0$, корни которого $x_1 = \frac{3}{2}$;

$x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = 1$; $x_4 = \frac{1}{6}$.

№ 46

Ответ: при $m = -\frac{27}{4}$.

№ 47

Ответ: (2; 1), (1; 2).

№ 48

Указание. Пусть x — меньшее, y — большее число. Пусть для определенности $x < y$.

Согласно условию $\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ y - x = 48. \end{cases}$

Решая систему, находим $x = 6$, $y = 54$.

№ 49

Решение. Функция $f(x) = \frac{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})}{(2x+1)(5x-7)}$ обращается в нуль в точках $x_1 = 1, x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{2}$ и претерпевает разрыв в точках $x_4 = -\frac{1}{2}$ и $x_5 = \frac{7}{5}$. Эти точки разбивают числовую прямую на 6 промежутков.

Решая неравенство $f(x) > 0$ методом интервалов, находим:

$$\left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{7}{5}\right) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

№ 50

Указание. Упростив I неравенство системы, получим $\frac{(x-2)(x+2)}{x} < 0$.

Решая методом интервалов, находим: $x < -2$, $0 < x < 2$.

Аналогично, из II неравенства имеем: $|x| \le 4$ или $-4 \le x \le 4$, тогда решением системы неравенств будет пересечение полученных множеств, т.е. $x \in [-4; -2) \cup (0; 2)$.

№ 51

Решение.

По условию в параллелограмме $ACBM$ $CE \perp AM$ и $\angle ECF = 60°$, тогда $\angle ACE = 30°$. Значит, $AE = \frac{1}{2}AC = 8$ (м).

Из ΔAEC, где $AC = 16$ м, $AE = 8$ м, $CE^2 = AC^2 - AE^2$, или $CE = \sqrt{(16-8)(16+8)} = \sqrt{8 \cdot 8 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$ (м).

№ 52

Указание. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то, после возведения в квадрат, получим $(4x-3)^2 \le (2x+3)^2$, откуда $x(x-3) \le 0$, или $0 \le x \le 3$.

№ 53

Решение. Так как точка O — точка пересечения медиан, то

$$AO = \frac{2}{3}m_a,$$

$$OC = \frac{2}{3}m_c,$$

$$OD = \frac{1}{3}m_b.$$

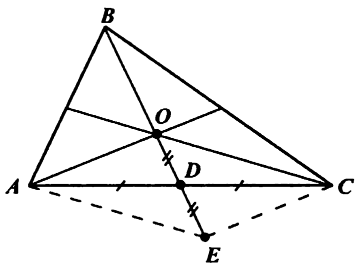


Рис. 61

Достроим ΔAOC до параллелограмма $AOCE$. Известно, что в параллелограмме $AC^2 + OE^2 = 2(AO^2 + OC^2)$, или

$b^2 + \frac{4}{9}m_b^2 = 2\left(\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9}m_c^2\right)$, откуда находим

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}.$$

№ 54

Решение. Так как по условию задачи точка M — середина диагонали AC и точка N — середина BD, то точки M и N лежат на средней линии трапеции EF. Так как EN — средняя линия ΔABD, то $EN = \frac{1}{2}a$.

Аналогично $EM = \frac{1}{2}b$. Значит,

$MN = EN - EM = \frac{1}{2}(a-b)$.

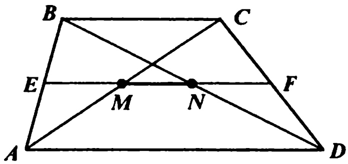


Рис. 62

№ 55

Ответ: 1681.

№ 56

Указание. Согласно условию, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 35 \\ \overline{ab} - 9 = \overline{ba} \end{cases}, \text{ где } \overline{ab} = 10a + b.$$

Из II уравнения системы $a = b + 1$, тогда I уравнение примет вид $(b+1)^3 + b^3 = 35$, откуда находим $b = 2$, тогда $a = 3$.

Искомое число — 32.

№ 57

Решение. Из условия $\Rightarrow$, что $x \geq 0$, тогда $2x - |y| = |x|$.

1) $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 2x - y = x. \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ y = x. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x > 0; y < 0, \\ 2x + y = x. \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0; y < 0, \\ y = -x. \end{cases}$

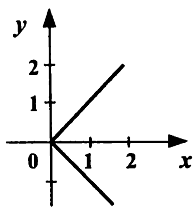


Рис. 63

№ 58

Решение. $-\frac{|x|}{4} \geq 0 \Rightarrow x = 0$, тогда $y = 1$.

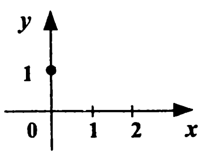


Рис. 64

№ 59

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

№ 60

Решение.

1) $x > 0$, тогда $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < \frac{1}{8}$, или $|x - 3| < \frac{1}{8}$, откуда $2\frac{7}{8} < x < 3\frac{1}{8}$.

2) $x < 0$, тогда $\sqrt{x^2 + 6x + 9} < \frac{1}{8}$, или $|x + 3| < \frac{1}{8}$, откуда находим $-3\frac{1}{8} < x < -2\frac{7}{8}$.

Следовательно, $x \in \left(-3\frac{1}{8}; -2\frac{7}{8}\right) \cup \left(2\frac{7}{8}; 3\frac{1}{8}\right)$.

№ 61

Решение. $n^3 + 3n^2 - 4 = n(n^2 + 4n + 4) - (n^2 + 4n + 4) =$
$= (n - 1)(n+2)^2$.

Отсюда видно, что полученное выражение делится на 19, если $n - 1$ или $n + 2$ делится на 19. Значит, наименьшим из натуральных чисел, удовлетворяющих условию задачи, является число вида $19^2 \cdot 16 = 5776$.

№ 62

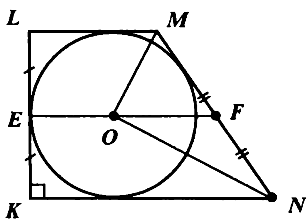


Рис. 65

Решение. Поскольку O — центр вписанной окружности, то MO и NO — биссектрисы углов KNM и LMN, тогда $\angle OMN + \angle ONM =$
$= \frac{1}{2}\angle KMN + \frac{1}{2}\angle LMN =$
$= \frac{1}{2}\left(\angle KNM + \angle LMN\right) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$,

т.е. $\angle MON = 90°$, тогда, из ΔMON $MN = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (дм).

Заметим, что высота OA ΔOMN является одновременно и радиусом вписанной окружности, тогда

$$S_{\Delta MON} = \frac{1}{2} OA \cdot MN = \frac{1}{2} OM \cdot ON,$$

откуда $OA = 4{,}8$ (дм^2). Значит, $KL = 2 \cdot OA = 9{,}6$ (дм).

По свойству описанного четырехугольника

$$KN + LM = KL + MN = 10 + 9{,}6 = 19{,}6 \text{ (дм)},$$

тогда $EF = \frac{1}{2}(KN + LM) = 9{,}8$ (дм).

№ 63

Указание. Рассмотреть всевозможные случаи:

1) $x \geq 0, y < 0$; 2) $x < 0, y < 0$;
3) $x > 0, y < 0$; 4) $x < 0, y > 0$.

Строим график (см. рис. 66).

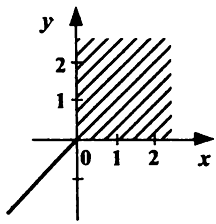


Рис. 66

№ 64

Ответ: 2.

№ 65

Указание. Пусть было взято x г 30%-ного и y г 10%-ного раствора. Тогда задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} x + y = 600 \\ 3x + y = 900 \end{cases}$, откуда находим (вычитанием) $x = 150$, $y = 450$. То есть было взято 150 г 30%-ного и 450 г 10%-ного раствора.

№ 66

Ответ: 35.

№ 67

Указание. Обозначить $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$. Решить полученную систему способом подстановки или, используя формулу суммы кубов в виде $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a + b)$. Далее имеем две пары решений:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ b_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{3} \\ b_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases},$$

откуда находим две пары решений исходной системы (2; 3) и (3; 2).

№ 68

Решение. Пусть $x_n = k^2$, тогда $n^2 - n + 19 = k^2$, или $4n^2 - 4n + 76 = 4k^2$;

$$4k^2 - (2n - 1)^2 = 75,\ (2k + 2n - 1)(2k - 2n + 1) = 75.$$

Но $75 = 75 \cdot 1 = 25 \cdot 3 = 15 \cdot 5$ и, кроме того, $2k + 2n - 1 > 2k - (2n - 1)$, тогда получим 3 системы:

1) $\begin{cases} 2k + 2n - 1 = 75 \\ 2k - 2n + 1 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} 4k = 76 \\ 4n - 2 = 74 \end{cases}$, $\begin{cases} k = 19 \\ n = 19 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} 2k + 2n - 1 = 25 \\ 2k - 2n + 1 = 3 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} k = 7 \\ n = 6 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} 2k + 2n - 1 = 15 \\ 2k - 2n + 1 = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} k = 5 \\ n = 3 \end{cases}$.

Отсюда видно, что наибольшее значение $n = 19$, тогда $x_n = 19^2 - 19 + 19 = 19^2$ — является точным квадратом.

№ 69

Указание. Использовать тот факт, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы.

№ 70

Указание. Записать уравнение в виде $(x^2 + 3)^2 = 6(x - 1)^2$, откуда $x^2 + 3 = \pm\sqrt{6}\,(x - 1)$.

Далее решить два квадратных уравнения:

1) $x^2 - \sqrt{6}x + (3+\sqrt{6}) = 0$ — нет корней ($Д < 0$);

2) $x^2 + \sqrt{6}x + (3-\sqrt{6}) = 0$,

откуда находим $x_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6}-6}\right)$.

№ 71

Решение. $3^{3^3} = 3^{27} < 3^{33}$; $33^3 > 27^3 > 3^9 < 3^{33}$.

$3^{3^3} = 3^{27} = 3^{3\cdot 9} = 27^9 = (27^3)^3 > 33^3$.

Значит, $3^{33} > 3^{3^3} > 33^3$.

№ 72

Указание. $(100a+10b+c)-(a+b+c)=x^2$,
или $9(11a+b)=x^2 \Rightarrow 11a+b=y^2$, где $0<a\le 9$, $0\le b\le 9$; $11\le 11a+b\le 108$.

Для y^2 возможны значения: 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Из этих значений получим всего 70 чисел.

№ 73

Ответ: $\left(\sqrt{2}x-\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{23}{8}}\right)^2$.

№ 74

Ответ: $a = -5$.

№ 75

Решение. Пусть x число сторон (а значит и вершин) многоугольника. Заметим, что из каждой вершины многоугольника можно провести $(x-3)$ диагонали, а из всех его вершин — в x раз больше. Тогда общее число диагоналей многоугольника будет равно $\dfrac{x(x-3)}{2}$. Согласно условию, имеем уравнение: $\dfrac{x(x-3)}{2}+x=21$. Решая его, найдем, что $x = 7$.

№ 76

Решение. Известно, что $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, $\frac{c+d}{2} \ge \sqrt{cd}$,

откуда $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} \ge \sqrt{abcd}$.

Но $\frac{(a+b)^2}{4} \ge ab$, значит,

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} \le \left(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \right)^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2.$$

Таким образом $\sqrt{abcd} \le \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2$,

откуда $\sqrt[4]{abcd} \le \frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

№ 77

Решение. По условию $x + y = \overline{aa}$ и $x^2 + y^2 + 10 = \overline{xy}$, где $\overline{xy} = 10x + y$ — двузначное число. Заметим, что соотношение $x + y = \overline{aa}$ выполняется лишь при $a = 1$, так как сумма двух однозначных чисел не превышает 18, а по условию сумма цифр данного числа состоит из одинаковых чисел.

Итак, $x + y = 11$ и $x^2 + y^2 + 10 = 10x + y$. Выражая y через x и подставляя во второе уравнение, получим квадратное уравнение $2x^2 - 31x + 120 = 0$, откуда $x_1 = 8$, $x_2 = 7{,}5$ (не подходит). Если $x = 8$, то $y = 3$, тогда 83 — искомое число.

№ 78

Указание. Рассмотреть два случая:

$$1) \begin{cases} x \ge 0, \ x \ne \pm 2, \\ y = \dfrac{1}{x-2}. \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x < 0, \ x \neq \pm 2, \\ y = -\dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

Строим график (см. рис. 67).

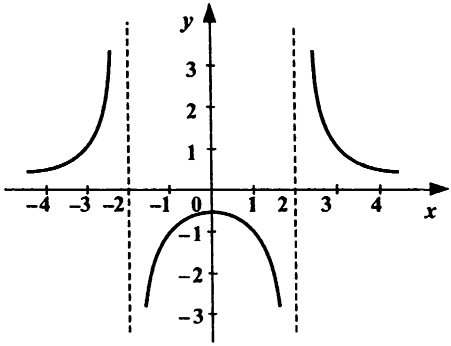


Рис. 67

№ 79

Ответ: 3 м; 6 м.

№ 80

Ответ: $D(y) = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$.

№ 81

Решение. При $x = -1$, $|x + 1| = 0$; при $x = 2$, $|x - 2| = 0$.

Точки -1 и 2 разбивают числовую прямую на 3 промежутка:

1) $x < -1$, тогда $-x - 1 + x - 2 < 3$ или $-3 < 3$, значит, данное неравенство выполняется при $x < -1$;
2) $-1 \leq x < 2$, тогда $x + 1 + x - 2 < 3$, откуда $x < 2$. Значит, $-1 \leq x < 2$;
3) $x > 2$, тогда $x + 1 - x + 2 < 3$, $3 < 3$ — неверно, значит, при $x > 2$ данное неравенство не имеет решений.

Объединяя полученные решения, имеем $x < 2$.

№ 82

Ответ: 0,5.

№ 83

Решение. $D: x \neq 0$,

$$y = \frac{|x|}{|x|^2} = \frac{1}{|x|} \Rightarrow y > 0.$$

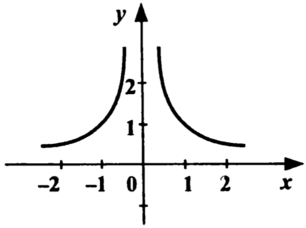


Рис. 68

1) $\begin{cases} x > 0, \\ y = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y < 0, \\ y = -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

№ 84

Решение. Пусть $\sqrt{x-3} = t$, где $t \geq 0$, тогда $x = t^2 + 3$ и $y = t - |t^2 + 4|$. Поскольку $t^2 + 4 > 0$ при всех t, то

$$y = t - (t^2 + 4) = -(t^2 - t + 4) = -\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right).$$

Следовательно, наименьшее значение функции достигается при $t = \dfrac{1}{2}$ и $y = -3{,}75$.

№ 85

Решение. Запишем данное равенство в виде

$$f(x^2 + \sqrt{x}) = x^4 + 2x^2\sqrt{x} - (x^2 + \sqrt{x}). \quad (1)$$

Пусть $$x^2 + \sqrt{x} = t, \quad (2)$$

или $$x^4 + 2x^2\sqrt{x} + x = t^2. \quad (3)$$

Учитывая (2) и (3), равенство (1) примет вид $f(t) = t^2 - t$, или, заменяя t на x, получим $f(x) = x^2 - x$.

№ 86

Решение. Поскольку многочлен четвертой степени может быть квадратом только квадратного трехчлена, то имеем:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 = (mx^2 + nx + p)^2,$$

или $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 =$

$$= m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2mp)x^2 + 2npx + p^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим: $m^2 = 1$; $p^2 = 1$; $2mn = a$; $n^2 + 2mp = b$; $2np = -8$, откуда $m = \pm 1$; $p = \pm 1$, $a_1 = -8$, $b_1 = 18$, $a_2 = 8$, $b_2 = 14$.

Итак, $a_1 = -8$; $a_2 = 8$; $b_1 = 18$; $b_2 = 14$.

№ 87

Ответ: 1.

№ 88

Указание. Если x и y — искомые числа и $x > y$ (для определенности), то $x + y + xy + x - y + \dfrac{x}{y} = 999$, откуда получим $(y+1)^2 = \dfrac{999y}{x}$. Далее учесть, что $\dfrac{x}{y} = p$ — целое число, тогда $(y+1)^2 = \dfrac{3^2 \cdot 111}{p} \Rightarrow p = 111$, тогда $y = 2$, $x = py = 222$, т.е. 2 и 222 — искомые числа.

№ 89

Решение. Из условия следует, что искомый квадратный трехчлен имеет вид

$$y = a(x+1)^2 + b. \qquad (1)$$

Так как график трехчлена (1) проходит через точки A и B, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a(-2+1)^2 + b = 2, \\ a(2+1)^2 + b = 26. \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 2, \\ 9a + b = 26. \end{cases} \qquad (2)$$

Вычтем из второго уравнения системы (2) первое:

$$9a - a = 26 - 2; \quad 8a = 24,\ a = 3.$$

Тогда из уравнения $a + b = 2$ находим $b = -1$.

Следовательно, при $a = 3$ и $b = -1$ искомый квадратный трехчлен (1) примет вид $y = 3(x + 1)^2 - 1$.

№ 90

Ответ: $\dfrac{3}{8}a^2$.

№ 91

Указание. Замена $x = y\sqrt{2}$ приводит к уравнению $2y^3 + y + 3 = 0$, левая часть которого разлагается на множители $(y+1)(2y^2 - 2y + 3) = 0$, откуда $y = -1$ — единственный корень, тогда $x = -\sqrt{2}$ — корень исходного уравнения.

№ 92

Решение. Так как простое $p > 3$, то оно имеет вид

$$p = 3k \pm 1, k \in N,$$

тогда $p^2 - 1 = (3k \pm 1)^2 - 1 = 3(3k^2 \pm 2k)$ — кратно 3.

Так как $p > 3$, то $p = 2n + 1$, $n \in N$, тогда

$$p^2 - 1 = (2n+1)^2 - 1 = 4n(n-1) \text{ — кратно 8,}$$

поскольку $n(n-1)$ — четно. Так как $p^2 - 1$ кратно 3 и 8, то $p^2 - 1$ кратно 24. Аналогично $q^2 - 1$ кратно 24, но тогда $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$ делится на 24.

№ 93

Ответ: $(4;-\infty)$.

№ 94

Указание. Применить теорему Виета. Тогда, согласно условию $x_1^3 + x_2^3 = 0$, или $(a^2 + a - 6)^3 + 3a^2(a^2 + a - 6) = 0$, откуда $a^2 + a - 6 = 0$, или $(a^2 + a - 6)^2 + 3a^2 = 0$.

Из первого уравнения находим $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, а второе уравнение не имеет действительных корней.

№ 95

Ответ: 8 : 3.

№ 96

Решение. Заметим, что $x^2 - x + 1 > 0$ для всех $x \in R$, так как дискриминант $D < 0$ и I коэффициент положителен. Тогда получим равносильное неравенство

$$x^2 + ax - 2 \geq -3(x^2 - x + 1), \text{ или } 4x^2 + (a-3)x + 1 \geq 0.$$

Полученное неравенство выполнятся для всех x, если $D \leq 0$, т.е. при $(a-3)^2 - 16 \leq 0$, $|a-3| \leq 4$, $-4 \leq a - 3 \leq 4$, откуда $-1 \leq a \leq 7$; тогда $a = 7$ — наибольшее значение.

№ 97

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 6$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{21}$.

№ 98

Указание. Преобразовать левую часть первого уравнения системы к виду: $(7x-(y+19))^2+35(y-2)^2$. Далее решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x-(y+19)=0, \\ y-2=0 \end{cases}$$

откуда $x = 3$, $y = 2$. Найденная пара (3; 2) удовлетворяет и II уравнению исходной системы, значит, является решением данной системы.

№ 99

Решение. Выделим в правой части уравнения полный квадрат: $x^4 = (y^2 + 1)^2 + 156$,

или $x^4 - (y^2 + 1)^2 = 156$. (1)

$$(x^2+y^2+1)(x^2-y^2-1)=156.$$

Но $156 = 1 \cdot 156 = 2 \cdot 78 = 3 \cdot 52 = 4 \cdot 39 = 6 \cdot 26 = 12 \cdot 13$.

Кроме того, $x^2+y^2+1>0$, и, очевидно,

$$x^2+y^2+1>x^2-y^2-1.$$

Так как по условию $x \in Z$, $y \in Z$ и 156 — четное число, то нам надо рассмотреть разложение числа 156 в произведение двух целых чисел одной четности. Из перечисленных пар годятся лишь пары (2; 78) и (6; 26).

С учетом перестановок этих пар и вышеизложенного, получим две системы:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+1=78, \\ x^2-y^2-1=2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2+1=26, \\ x^2-y^2-1=6. \end{cases}$

Заметим, что система (1) не имеет решений в целых числах, а система (2) имеет 4 пары решений, удовлетворяющих исходному уравнению: (–4; –3), (–4; 3), (4; –3), (4; 3).

№ 100

Указание. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(20 - x), \\ y^2 + h^2 = 13^2, \\ (20 + x)h = 360, \end{cases}$$

где x — длина верхнего основания, h — высота трапеции, y — проекция боковой стороны на нижнее основание.

Далее, выразить y и h через x, тогда получим уравнение $x^4 - 1476x^2 - 27040x + 408000 = 0$, откуда находим $x = 10$ — единственный корень уравнения (поскольку $x < 20$).

№ 101

Указание. Число, не делящееся на 3, имеет вид: $3m + 1$ или $3m + 2$.

№ 102

Решение. Запишем данный многочлен в виде

$(19x+99)^2 + (19x+15)^2 = 2\cdot19^2x^2 + 2\cdot19\cdot114x + (99^2 + 15^2)$.

Как видим, трехчлен в правой части полученного равенства представляет собой графически параболу, ветви которой направлены вверх, тогда наименьшее значение будет достигаться при условии, если $x_0 = -\frac{b}{2a}$, или

$$x_0 = -\frac{2\cdot19\cdot144}{2\cdot2\cdot19^2} = -3.$$

№ 103

Ответ: $x(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

№ 104

Ответ: $\dfrac{a^2 - 1}{a^4 - 2a^2 + 4}$.

№ 105

Указание. $75-12\sqrt{21}=(2\sqrt{7}-2\sqrt{3})^2$.

№ 106

Решение. Пусть $x+\frac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Обозначив данное выражение буквой A, получим:

$A=(t^2-2)^2-4t^2+12=t^4-8t^2+16=(t^2-4)^2$, тогда

$$\sqrt{A}=|t^2-4|=\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4\right|=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right|=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2.$$

№ 107

Ответ: (5; 4), (–9; 25).

№ 108

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Пусть $x_1=x_2^3$, тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=10, \\ x_1x_2=2c^3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2^3+x_2=10, \\ x_2^4=2c^3. \end{cases} \qquad (1)$$

Решим I уравнение системы (1): $x_2^3+x_2-10=0$. Заметим, что $x_2=2$ — корень уравнения, тогда $(x_2-2)(x_2^2+x_2+5)=0$, откуда $x_2=2$ — единственный корень, так как квадратное уравнение $x_2^2+x_2+5=0$ не имеет действительных корней ($D<0$). Если $x_2=2$, то из II уравнения системы (1) находим $2c^3=2^4$; $c=2$.

№ 109

Ответ: при любом a, кроме $a=0$ и $a=-\frac{1}{4}$.

№ 110

Решение. Известно, что $S=\frac{1}{2}ab$, где a и b — катеты.

По условию $a^2+b^2=\frac{8}{\sqrt{3}}S$, или $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{4}{\sqrt{3}}$,

или
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{4}{\sqrt{3}}. \qquad (1)$$

Пусть $\frac{a}{b}=x$, тогда (1) примет вид $x+\frac{1}{x}=\frac{4}{\sqrt{3}}$, или $x^2-\frac{4}{\sqrt{3}}x+1=0$, откуда находим $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Поскольку $\frac{a}{b}=x=\operatorname{tg}\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. углы прямоугольного треугольника равны 30°, 60° и 90°.

№ 111

Указание. Преобразовать данную функцию к виду

$$y=1-\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}},$$

откуда $y_{наим.}=y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{7}$.

№ 112

Решение. Очевидно, что при делении многочлена 3-й степени на многочлен 2-й степени получим многочлен 1-й степени. Так как в делимом и делителе коэффициенты при старших неизвестных равны по единице, то частное будет иметь вид $x+c$, т.е. получим:

$$x^3+13x^2+ax+b=(x^2+x+2007)(x+c).$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, имеем:

$$x^3+13x^2+ax+b=x^3+x^2+2007x+cx^2+cx+2007c=$$
$$=x^3+(1+c)x^2+(2007+c)x+2007c.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$\begin{cases} 1+c=13, & c=12 \\ 2007+c=a, & a=2019 \\ 2007c=b, & b=24084 \end{cases}$$

№ 113

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2^3}$:

$$\frac{\sqrt{2^3}\left(\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}+\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}\right)}{\sqrt{2^3}\left(\sqrt{(9+\sqrt{77})^3}-\sqrt{(9-\sqrt{77})^3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{(12+2\sqrt{35})^3}+\sqrt{(12-2\sqrt{35})^3}}{\sqrt{(18+2\sqrt{77})^3}-\sqrt{(18-2\sqrt{77})^3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(12+2\sqrt{35})^3}+\sqrt{(7-2\sqrt{35}+5)^3}}{\sqrt{(18+2\sqrt{77})^3}-\sqrt{(11-2\sqrt{77}+7)^3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^{2\cdot 3}}+\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^{2\cdot 3}}\right)}{\sqrt{(\sqrt{11}+\sqrt{7})^{2\cdot 3}}-\sqrt{(\sqrt{11}-\sqrt{7})^{2\cdot 3}}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}{(\sqrt{11}+\sqrt{7})^3-(\sqrt{11}-\sqrt{7})^3}=\frac{22}{40}=\frac{11}{20}$$ — рациональная дробь.

№ 114

Ответ: $2(b^2-c)=(a^2-b)^2$.

№ 115

Указание. Из точки $D\in BC$ провести $DE\|AC$, тогда E — центр описанной около ΔADF окружности, значит,

$EA = ED = EF = R$. Далее доказать, что ΔDEB и ΔAED — равнобедренные, и $BD = DE = AE = FE = R = a$.

№ 116

Ответ: 47.

№ 117

Решение. Пусть $AM = 2$, $MB = 11$. Продолжим AM до пересечения в точке D со стороной DO данного угла. ΔOAD и ΔMBD — прямоугольные с общим углом ADO в 30°.

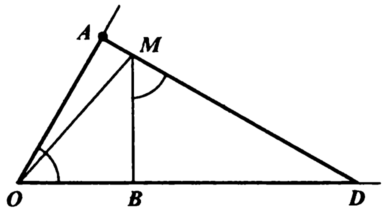


Рис. 69

Из ΔOAM и ΔOAD, $MD = 2MB = 22$,
$AD = AM + MD = 24$; $OD = 2 \cdot OA$, $OM = 14$.

№ 118

Решение. Разделим обе части уравнения на $(x+1)^2 \neq 0$.

$$x\left(\frac{7-x}{x+1}\right)\cdot\frac{7+x^2}{x+1}=12,$$

или

$$x\left(\frac{7-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{7-x}{x+1}\right)=12. \qquad (1)$$

Пусть $x\left(\frac{7-x}{x+1}\right)=u$, $\left(x+\frac{7-x}{x+1}\right)=v$,

тогда $uv = 12$ и $u + v = \frac{7-x}{x+1}(x+1)+x=7$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases}u+v=7\\uv=12\end{cases}$, откуда по теореме, обратной теореме Виета, находим:

$$\begin{cases}u_1=3,\\v_1=4\end{cases} \text{ или } \begin{cases}u_2=4,\\v_2=3.\end{cases}$$

Учитывая одну из подстановок, например, первую, получим два уравнения:

1) $x\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)=3$, или $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$; $x_2=3$.

2) $x\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)=4$, или $x^2-3x+4=0$ — нет действительных корней, так как $D<0$.

Итак, $x_1=1$, $x_2=3$ — корни исходного уравнения.

№ 119

Решение. Запишем неравенство в виде

$$(-x^2+7x-19)a+(3x^2-19x+44)>0. \qquad (1)$$

Левая часть (1) имеет вид $f(a;x)=f_1(x)\cdot a+f_2(x)$, где $f_1(x)=-x^2+7x-19$, $f_2(x)=3x^2-19x+44$.

Заметим, что функция $f(a,x)$ является линейной относительно a, тогда неравенство

$f(a,x)>0$ будет выполняться при всех $a\in(1;2)$, если

$$f(1;x)=2x^2-12x+25\geq 0, \qquad (2)$$

$$f(2;x)=x^2-5x+6\geq 0. \qquad (3)$$

Решим неравенство (2): так как $D/4=-14<0$ и I коэффициент равен $2>0$, то (2) выполняется при любом $x\in R$.

Неравенство (3) решаем методом интервалов: $x\leq 2$; $x\geq 3$.

Значит, решением исходного неравенства будет:

$(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

№ 120

Решение.

I способ. Проведем через вершину B прямую $BD \| CK$ (см. рис. 70). Заметим, что ΔBCD — равносторонний. Из подобия ΔACK и ΔADB имеем:

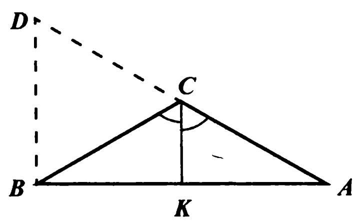


Рис. 70

$$\frac{BD}{CK}=\frac{AD}{AC}=\frac{AC+DC}{AC}=1+\frac{CD}{AC}. \qquad (1)$$

Разделив обе части (1) на $BD = CD = BC$, получим требуемое.

II способ. Поскольку $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACK} + S_{\Delta BCK}$, то

$$\frac{1}{2}AC \cdot BC\sin 120° = \frac{1}{2}AC \cdot CK \cdot \sin 60° + \frac{1}{2}CK \cdot BC\sin 60°,$$

где $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60°$, тогда

$$AC \cdot BC = AC \cdot CK + CK \cdot BC. \qquad (2)$$

Разделив обе части (2) на $AC \cdot BC \cdot CK \neq 0$, получим $\frac{1}{CK}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}$, ч. т. д.

№ 121

Ответ: 15 дм.

№ 122

Указание. Задача сводится к решению уравнения $\left(\frac{1}{16^2}+\frac{15^2}{9^2 \cdot 16^2}\right)\cdot x^2 + 14 = x$, где x — число павлинов в стае.

Решая, находим $x_1 = 48$, $x_2 = \frac{336}{17}$ (не подходит).

№ 123

Решение. Из точки M раствором циркуля, равным длине диаметра данной окружности, проведем окружность, которая пересечет данную в точках C и C_1 (см. рис. 71). Соединив эти точки с точкой O и продолжив полученные отрезки CO и C_1O до пересечения с окружностью соответственно в точках A и A_1, получим секущие AM и A_1M, которые и будут искомыми.

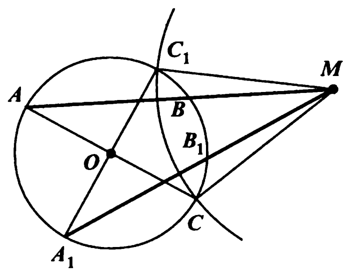


Рис. 71

№ 124

Ответ: $x = 9$; $y = 8$.

№ 125

Решение. Имеем:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x(x+3)(x+1)(x+2)+1 =$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1=$$
$$=(x^2+3x+1)^2 \text{ — верно.}$$

№ 126

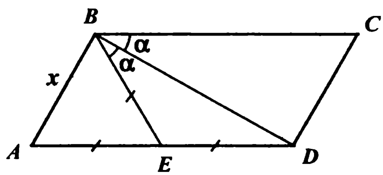


Рис. 72

Решение. Пусть $AB = x$, $BC = 2x$, $\angle CBD = \alpha$, $\angle ABD = 3\alpha$.

Построим луч BE так, чтобы $\angle EBD = \alpha$.

Тогда $\angle ABE = 2\alpha = \angle AEB$; $BE = AE = ED = x$.

Значит, $\angle ABD = 90°$, $\angle A = 60°$, $\angle ABC = 120°$.

№ 127

Ответ: прямоугольные трапеции с основанием 2 см и 5 см.

№ 128

Решение. Если $a^2 + b^2 \le c^2$, то $a^3 + b^3 < a^2c + b^2c \le c^3$.

Значит, $c^2 < a^2 + b^2$, т.е. треугольник остроугольный.

№ 129

Решение. Через точку P пересечения диагоналей AC и BD проведем $EF \| BC$. Известно, что $EP = PF$ ($ABCD$ — равнобедренная трапеция). Пусть $EP = PF = x$. Из подобия ΔBEP и ΔABD, ΔDPF и ΔBCD получим: $\dfrac{EP}{AD} = \dfrac{BP}{BD}$, $\dfrac{PF}{BC} = \dfrac{DP}{BD}$,

или $\dfrac{x}{8} + \dfrac{x}{1} = \dfrac{BP}{BD} + \dfrac{DB}{BD}$, откуда $x = \dfrac{8}{9}$.

В трапеции $AEFD$, по свойству касательных, проведенных из точки к окружности, имеем: $AE = 4 + \frac{8}{9} = \frac{44}{9}$.

Так как $PK = EM$ — как высоты трапеции $AEFD$, то

$$AM = 4 - \frac{8}{9} = \frac{28}{9},$$

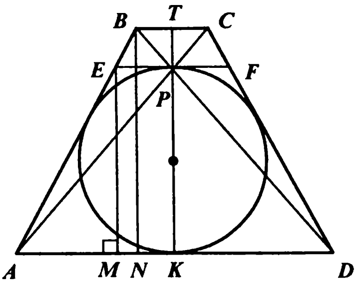


Рис. 73

$$EM = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3},\ r_1 = \frac{1}{2}PK = \frac{1}{2}EM = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Аналогично, найдя высоту TP трапеции $BEFC$, имеем $r_2 = \frac{2}{3}$. Итак, $r_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $r_2 = \frac{2}{3}$.

№ 130

Указание. По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3a, \\ x_1 \cdot x_2 = a - \frac{1}{4}. \end{cases}$ Тогда

$$(x_1 - 7x_2)(x_2 - 7x_1) = 50x_1x_2 - 7((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) =$$
$$= -63a^2 + 64a - 16.$$

Значит, $x_0 = a = -\frac{b_1}{2a_1} = \frac{32}{63}$ — наибольшее значение данного выражения. Остается проверить наличие корней x_1 и x_2 при $a = \frac{32}{63}$; $x^2 - 3 \cdot \frac{32}{63}x + \frac{32}{63} - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{32}{21}x + \frac{65}{252}$;

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{16}{21}\right)^2 - \frac{65}{252} = \frac{256}{441} - \frac{65}{252} > 0.$$

Итак, $a = \frac{32}{63}$.

№ 131

Ответ: $(2xy-y+1)(2xy-y+4x+1)$.

№ 132

Решение. При $a=b$ получим тождество. Пусть $a \neq b$. Так как $a^2b^2=a+b$, то $a^2b^2(a-b)=(a+b)(a-b)$, или $a^2b^2(a-b)=a^2-b^2$, или $a^3b^2-a^2b^3=a^2-b^2$. (1)

Прибавим к обеим частям (1) $a^2b^2 \neq 0$:

$$a^3b^2-a^2b^3+a^2b^2=a^2-b^2+a^2b^2,$$

или $a^2b^3+a^2b^2+a^2=a^3b^2+a^2b^2+b^2$,

откуда $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{a^3+a^2+1}{b^3+b^2+1}$.

№ 133

Указание. Достаточно заметить, что

$2^{5n+1}+5^{n+2}=2(27+5)^n+5^n(27-2)=27k$.

№ 134

Решение. Очевидно, что координата точки пересечения прямой с осью OX находится из условия $2ax+b=0$, откуда $x=-\dfrac{b}{2a}$, что совпадает с абсциссой вершины параболы. Поскольку эти две точки не совпадают, то такая ситуация невозможна.

№ 135

Указание. Учесть, что $x \neq 0$. Тогда уравнение приводим к виду $x^2-\dfrac{49}{4}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{2x^2}$; $x^2-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$.

Далее разлагаем обе части на множители, откуда находим $x_1=3{,}5$; $x_2=0{,}5$; $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{2}$.

Замечание. Можно привести другие способы решения.

№ 136

Указание. Записать выражение в виде

$$6^n(8^n-1^n)+(13^n-6^n).$$

Далее учесть, что разность одинаковых степеней делится на разность их оснований.

№ 137

Решение. $x^4+y^4=(x^2-y^2)^2+2x^2y^2$.

Поскольку $xy=2\sqrt{2}$, то $x^4+y^4=(x^2-y^2)^2+16$. (1)

Пусть $x^2-y^2=z$, тогда (1) запишется в виде

$$x^4+y^4=z^2+16,$$

значит $\dfrac{x^4+y^4}{x^2-y^2}=\dfrac{z^2+16}{z}=z+\dfrac{16}{z}$, где $z>0$, так как $x>y$.

Но $z+\dfrac{16}{z}\geq 2\sqrt{z\cdot\dfrac{16}{z}}=8$, тогда, если $x>y$ и $xy=2\sqrt{2}$, то $\dfrac{x^4+y^4}{x^2-y^2}\geq 8$, ч. т. д.

№ 138

Ответ: Да.

№ 139

Ответ: $\sqrt{2007}-1$.

№ 140

Указание. Записать уравнение как квадратное относительно y: $y^2+(x+z)y+(3x^2+2z^2+xz-1)=0$; $D\geq 0$, т.е. $7z^2+2xz+(11x^2-28)\leq 0$; $D\geq 0$, откуда $x^2\leq\dfrac{49}{19}$, т.е. $x=\dfrac{7}{\sqrt{19}}$ — наибольшее значение x.

№ 141

Решение. Пусть было x — белых и у черных шаров, тогда

$$\begin{cases} x+y=30, \\ x\le 19, \\ y\le 11 \end{cases} \begin{cases} x=30-y, \\ -y\ge -11, \\ x\le 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=30-y\ge 30-11=19, \\ x\le 19 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 19, \\ x\le 19 \end{cases} \Rightarrow x=19.$$

Итак, в коробке 19 белых и 14 черных шаров.

№ 142

Решение. Пусть AD — большее основание трапеции $ABCD$.

AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 — биссектрисы ее внутренних углов.

По условию $AB_1 = B_1C_1 = C_1D$ и $BD_1 = D_1A_1 = A_1C$ (это единственно возможный случай выполнения условия).

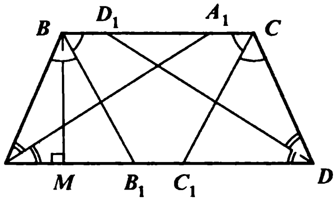


Рис. 74

Пусть $BC = 3x$. Так как AA_1 и BB_1 — биссектрисы соответствующих углов A и B, то $BA_1 = AB = AB_1$

$(\angle BA_1A = \angle A_1AD = \angle BAA_1,\ \angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle BB_1A)$.

Значит, $AB = 2x$, $AD = 6x$ — трапеция равнобедренная. Проведем высоту BM, тогда по теореме Пифагора имеем:

$$4x^2-\frac{9x^2}{4}=1,\ \text{или}\ \frac{7}{4}x^2=1,\ \frac{\sqrt{7}}{2}x=1,\ \text{откуда}\ x=\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Следовательно, $S_{ABCD}=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot BM$,

или $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{12}{\sqrt{7}}+\dfrac{6}{\sqrt{7}}\right)\cdot 1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{18}{\sqrt{7}}=\dfrac{9}{\sqrt{7}}.$

9 класс

№ 1

Решение.

$$80^{13} < 81^{13} = (3^4)^{13} = 3^{52} < 3^{56} = (3^4)^{14} = (3^2)^{28} = 9^{28} < 10^{28}.$$

№ 2

Решение. Возведем обе части неравенства в куб:

$$1+x<1+3\cdot\frac{x}{3}+3\cdot\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}=\left(1+\frac{x}{3}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{1+x}<1+\frac{x}{3}.$$

№ 3

Указание. Достаточно взять $a = n + 4$.

Тогда $an + 4 = (n + 2)^2$.

№ 4

Решение. В худшем случае из коробки будут вынуты 340 белых и 340 красных шаров (в любой последовательности) и не окажется 341 шара одного цвета. Если вынуть еще один шар, то получим либо 341 белый, либо 341 красный шар. То есть из коробки нужно вынуть не глядя всего 340 + 340 + 1 = 681 шаров.

№ 5

Решение. Нет, так как иначе корзины с четным и нечетным количеством орехов должно чередоваться, т.е. корзин должно быть четное число.

№ 6

Указание. Учесть, что ΔMNK и ΔKPE вместе составляют ΔMKE. Тогда площадь пятиугольника равна двум площадям ΔMKE, т.е. равна $2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=1$.

№ 7

Решение. При $x = 13$ имеем: $a\cdot13^2+b\cdot13+c=2$,

а при получим: $x = 60$ $a\cdot60^2+b\cdot60+c=3$.

Вычтем из второго равенства первое:

$$a(60^2-13^2)+b(60-13)=1,$$

а если a и b — целые, то 1 делится на $60-13=47$, что неверно.

№ 8

Решение. Пусть в ΔABC $AC=b$, $AB=C$. По теореме косинусов имеем:

$$BC^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A,$$

или

$$BC^2=b^2+c^2-bc. \qquad (1)$$

По теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin\angle B}=\dfrac{BC}{\sin\angle A}$, откуда

$$\sin\angle B=\frac{b\sqrt{3}}{2\cdot BC}, \text{ или } \sin^2\angle B=\frac{3b^2}{4BC^2}.$$

Учитывая (1), получим

$$\sin^2\angle B=\frac{3b^2}{4(b^2+c^2-bc)}. \qquad (2)$$

По условию задачи $\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, откуда $b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c$, тогда (2) примет вид $\sin^2\angle B=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Так как $\sin^2\angle B=\dfrac{1-\cos 2\angle B}{2}$, то $\dfrac{1-\cos 2\angle B}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$, откуда находим $\cos 2\angle B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, или $2\angle B=150°$, т.е. $\angle B=75°$.

№ 9

Решение. Пусть n число домов, a — первый и b — последний номер домов. Так как номера домов возрастают на 2, то имеем возрастающую арифметическую прогрессию, тогда $S_n=\dfrac{a+b}{2}\cdot n=423$.

Но $423 = 3 \cdot 3 \cdot 47$, и, так как $n \geq 5$, то $n = 9$. Значит, номер пятого (среднего) дома равен 47.

№ 10

Ответ: $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.

№ 11

Указание. Записать уравнение в виде $4x^2 - \frac{25}{9} = 4 - \frac{10}{3x}$.

Далее решая, находим: $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$.

№ 12

Ответ: 13225.

№ 13

Решение. Данное выражение представим в виде

$$333^{777} + 777^{333} = (333^{777} + 7^{777}) + (777^{333} - 7^{333}) - (7^{777} - 7^{333}).$$

Известно, что сумма нечетных степеней делится на сумму оснований, а разность любых целых степеней делится на разность оснований. Тогда выражение, стоящее в первой скобке делится на 333 + 7 = 340, т.е. на 10. Выражение во второй скобке делится на 777 – 7 = 770, т.е. на 10.

Наконец, выражение в третьей скобке

$$7^{777} - 7^{333} = 7^{333} \cdot (7^{444} - 1) = 7^{333} \cdot (7^{4 \cdot 11} - 1) = 7^{333} \cdot (2401^{111} - 1)$$

кратно 10, так как $2401^{111} - 1$ кратно 2401 – 1 = 2400, т.е. 10. Итак, данное выражение делится на 10.

№ 14

Решение. Обозначим через x, y, z, u — соответственно количество «двоек», «троек», «четверок» и «пятерок».

По условию $\begin{cases} x + y + z + u = 30, & (1) \\ 2x + 3y + 4z + 5u = 90. & (2) \end{cases}$

Кроме того, $$u < z < y. \quad (3)$$

Согласно условию z кратно 5 и y кратно 7. Из (3) $\Rightarrow$ $y \neq 0$, $z \neq 0$. Из (1) и (2) исключим x:

$$\begin{cases} 2x+2y+2z+2u=60 \\ 2x+3y+4z+5u=90 \end{cases}$$

откуда $$y + 2z + 3u = 30. \quad (4)$$

Так как z кратно 5 и $z \neq 0$, то из (4) $\Rightarrow$ $z = 5$ или $z = 10$.

Рассмотрим обе возможности:

1. Если $z = 5$, то (4) примет вид

$$y + 3u = 20. \quad (5)$$

Так как $y \neq 0$ и y кратно 7, то с учетом (5) находим $y = 7$ или $y = 14$. Но, если $y = 7$, то из (5) $\Rightarrow$ $3u = 13$ — не подходит, так как u — целое число. Если $y = 14$, то $3u = 6$, $u = 2$, тогда $x = 30 - (14 + 5 + 2) = 9$.

2. Если $z = 10$, то $y + 3u = 10$.

Так как $y \neq 0$ и y кратно 7, то с учетом условия $z < y$ следует, что при $z = 10$ должно быть $y > z$ и уравнение $y + 3u = 10$ не имеет решения при указанном ограничении.

Итак, $x = 9$; $y = 14$; $z = 5$; $u = 2$, т.е. «пятерок» — 2, «четверок» — 5, «троек» — 14 и «двоек» — 9.

№ 15

Решение. Пусть $a = 17$, $b = 25$, $c = 26$ см — стороны I треугольника, $a = 17$, $b = 25$ — две стороны II треугольника и x — длина третьей стороны.

По условию, у данных треугольников равны радиусы вписанных окружностей, тогда

$$r = \frac{S_1}{p_1} = \frac{S_2}{p_2}, \text{ где } S_1 = \sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-b)(p_1-c)},$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(a+b+c) = 34 \text{ и } S_1 = \sqrt{34 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 8} = 204 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Аналогично, $p_2 = \dfrac{42+x}{2}$

и $S_2 = \sqrt{\frac{42+x}{2} \cdot \left(\frac{42+x}{2} - 17\right)\left(\frac{42+x}{2} - 25\right)\left(\frac{42+x}{2} - x\right)} =$

$$= \sqrt{\frac{42+x}{2} \cdot \frac{42-x}{2} \cdot \frac{8+x}{2} \cdot \frac{x-8}{2}}.$$

Итак, $\frac{\sqrt{(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)}}{4} : \frac{42+x}{2} = \frac{204}{34}$,

или $\frac{\sqrt{(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)}}{2(42+x)} = 6$,

или $(42+x)(42-x)(x+8)(x-8) = 144(42+x)^2$; $42 + x \neq 0$

$$(42-x)(x^2-64) = 144(42+x),$$

$$42x^2 - x^3 - 2688 + 64x = 6048 + 144x,$$

$$x^3 - 42x^2 + 80x + 8736 = 0.$$

Можно убедиться, что $x = 28$ — корень кубического уравнения, тогда получим:

$$x^2(x-28) - 14x(x-28) - 312(x-28) = 0,$$

$$(x-28)(x^2 - 14x - 312) = 0, \quad x_1 = 28,$$

$x^2 - 14x - 312 = 0$, откуда находим $x_2 = 26$, $x_3 = -12$ (не подходит, так как $x > 0$).

Если $x = 26$, то получим I треугольник. Итак, длина третьей стороны II треугольника равна 28 см. При этом $r = 6$ см (можно проверить непосредственно).

Замечание 1. Условие этой задачи заимствовано из книги *Тригг Ч.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975. № 167. С. 41–42.

Замечание 2. Редким примером «тупоугольных близнецов» служат треугольники со сторонами, равными соответственно 97, 169, 122 и 97, 169, 228. У каждого из них $r = 30$ (см. там же).

Замечание 3. Представляет интерес нахождение двух треугольников подобного вида у которых равны радиусы описанной окружностей (*прим. авт.*).

№ 16

Решение. Известно, что $S\Delta = \dfrac{abc}{4R} = p \cdot r$,

или $\dfrac{abc}{4R} = \dfrac{a+b+c}{2} r$, откуда $2Rr(a+b+c) = abc$. (1)

По условию $Rr = 130$, тогда (1) примет вид

$$260(a+b+c) = abc. \quad (2)$$

Поскольку стороны a, b, c ΔABC образуют арифметическую прогрессию, то $2b = a + c$, тогда (2) примет вид $260 \cdot 3b = abc$, откуда $ac = 780$. Итак, $a + c = 2b$, $ac = 780$, т.е. стороны a и c можно принять за корни некоторого квадратного уравнения $x^2 - 2bx + 780 = 0$, $\dfrac{D}{4} = b^2 - 780$, $x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 780}$.

Наименьшую тройку (a, b, c) получим, полагая $b = 28$, тогда $x_{1,2} = 28 \pm 2$, откуда $x_1 = 30$; $x_2 = 26$. Так как $a < b < c$, то условию задачи удовлетворяет наименьшая тройка чисел (26; 28; 30).

№ 17

Решение.

$$\left(1+\frac{7}{\sin x}\right)\left(1+\frac{19}{\cos x}\right) > 293,$$

$$1+\frac{7}{\sin x}+\frac{19}{\cos x}+\frac{7\cdot 19\cdot 2}{2\sin x\cos x}=$$

$$=1+\frac{7}{\sin x}+\frac{19}{\cos x}+\frac{266}{\sin 2x} > 1+7+19+266 \doteq 293.$$

№ 18

Решение. Поскольку четвертая степень числа БЕС = x является четырехзначным числом, то само число x не меньше 6 и не больше 9, так что БЕСЫ — одно из чисел 1296, 2401, 4096, 6561. Из перечисленных чисел лишь второе удовлетворяет требуемому условию, а именно Б = 2; Е = 4; С = 0; Ы = 1.

№ 19

Решение. Допустим противное. Тогда общее количество кроликов будет не меньше, чем 0 + 1 + 2 + 3 + ...+ 45 = $=\frac{45\cdot 46}{2}=1035>1000$.

№ 20

Указание. Привести неравенство к виду

$$(6\sin x-\cos x)^2\geq 0.$$

№ 21

Решение. Данное уравнение можно решить различными способами.

I способ. Запишем уравнение в виде

$$(x^4+4x^3+4x^2)-2x^2-4x+1=0,$$

или $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)\cdot 1+1=0$,

$$(x^2+2x-1)^2=0,\ x^2+2x-1=0,$$

$$\frac{D}{4}=1+1=2>0,\ \ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет два сопряженных корня.

II способ. $x^4+4x^3+2x^2-4x+1=0$.

Из условия следует, что $x\neq 0$, тогда имеем:

$$x^2+4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

или $$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x-\frac{1}{x}\right)+2=0.$$

Заменой $x-\frac{1}{x}=t$, получим $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$,

$t^2+4t+4=0$, $(t+2)^2=0$, $t+2=0$, откуда $t=-2$.

Значит, $x - \frac{1}{x} = -2$, или $x^2 + 2x - 1 = 0$, и т.д. (см. I способ).

III способ. Вычтем от обеих частей уравнения $4x^2$:

$$(1+x^2)^2 - 4x^2 = 4x(1-x^2) - 4x^2,$$

или $$(1-x^2)^2 = 4x(1-x^2) - 4x^2.$$

Разделим обе части полученного уравнения на

$$x(1-x^2) \neq 0.$$

Получим $\frac{1-x^2}{x} = 4 - 4 \cdot \frac{x}{1-x^2}$; пусть $\frac{1-x^2}{x} = t$,

тогда $t = 4 - \frac{4}{t}$, $t^2 - 4t + 4 = 0$, $t = 2$ и т.д. (см. I способ).

IV способ. Пусть $x = \text{tg}t$, тогда $(1 + \text{tg}^2 t)^2 = 4\text{tg}t(1 - \text{tg}^2 t)$. Далее имеем:

$$\frac{1}{\cos^4 t} = \frac{4\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t},$$

или $$\frac{1}{\cos t} = 4\sin t \cos 2t, \quad 4\sin t \cos t \cos 2t = 1,$$

$$2\sin 2t \cos 2t = 1, \quad \sin 4t = 1, \quad 4t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$t = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, тогда $x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}\right)$ и т.д.

№ 22

Решение. Проведем диагональ LT. Так как трапеция $KLMT$ — равнобедренная, то диагонали MK и LT равны и углы при основаниях равны (по свойству). O — точка пересечения диагоналей. Кроме того $OK = OT$ и $\angle OTK = \angle OKT = 75°$. Значит, $\angle KOT = 180° - (75° + 75°) = 30°$, следовательно, $S_{KLMT} = \frac{1}{2} KM \cdot LT \sin 30° = 16$ (м^2)

№ 23

Решение. Имеем:

$$2a+(2a+2)+(2a+4)+\ldots+(2a+2k)=100,$$

или $$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+k)=50. \qquad (1)$$

Последовательность (1) представляет собой возрастающую арифметическую прогрессию у которой сумма равна 50:

$$\frac{a+(a+k)}{2}\cdot n=50,$$

или $$(2a+k)\cdot n=100. \qquad (2)$$

Так как $a_n=a+k$, а с другой стороны, $a_n=a_1+(n-1)d$, то $a+k=a+n-1$, откуда $n=k+1$, и, учитывая (2), получим

$$(2a+k)(k+1)=100. \qquad (3)$$

Из (3) $\Rightarrow$ $2a+k-(k+1)=2a-1$ — нечетно, т.е. один из множителей четен, а другой — нечетен. Кроме того, $2a+k>k+1$. Но $100=100\cdot 1=25\cdot 4=20\cdot 5$, тогда имеем три возможности:

1) $\begin{cases}2a+k=100\\ k+1=1\end{cases}$, $a=50$, $k=0$ (не подходит, так как получим одно число).

2) $\begin{cases}2a+k=25\\ k+1=4\end{cases}$, $\begin{cases}2a=22\\ k=3\end{cases}$, откуда получим последовательность $22+24+26+28=100$.

3) $\begin{cases}2a+k=20\\ k+1=5\end{cases}$, $\begin{cases}2a=16\\ k=4\end{cases}$,

т.е. $16+18+20+22+24=100$.

Итак, задача имеет два решения:

$$22+24+26+28=100,$$
$$16+18+20+22+24=100.$$

№ 24

Указание. Достроить ΔABC до параллелограмма $ABCE$. Далее применить теорему синусов. После преобразований находим: $AB = 7\sqrt{2}$ дм, $BD = \frac{7}{2}(1+\sqrt{3})$ дм.

№ 25

Решение. Пусть $\overline{ab} = 10a + b$ — двузначное число, где a — цифра десятков, b — единиц. Согласно условию имеем: $10a + b = k \cdot ab$, или $b = a(kb - 10) \Rightarrow$, что b кратно a.

Итак, $b = ma$, где a и b — однозначны, поэтому и m — однозначно.

Так как $10a + b = 10a + ma = a(10 + m)$ и $10a + b = k \cdot ab$, то $a(10 + m) = k \cdot ab$, т.е. $10 + m = kb$, или $10 + m = k \cdot ma \Rightarrow$ $\Rightarrow 10 = m(ka - 1)$, значит, m — делитель числа 10, тогда $m = 1; 2; 5; ka = \frac{10}{m} + 1$.

1. Если $m = 1$, то $a = 1$, $b = 1$. Искомое число 11.
2. Если $m = 2$, то $a = 1, 2, 3$, и $b = 2, 4, 6$. Получим 3 числа: 12, 24 и 36.
3. Если $m = 5$, то а $= 1$, $b = 5$, т.е. получим число 15. Таким образом, находим всего 5 чисел: 11, 12, 24, 36, 15.

№ 26

Ответ: $\frac{1}{4}(m^2 - p^2)$ см^2.

№ 27

Указание. Согласно условию имеем систему уравнений:

$\begin{cases} a + b + c = 17 \\ \overline{abc} - \overline{cba} = 792 \end{cases}$, откуда находим единственное число 971.

№ 28

Решение. Пусть $a = 11$ м, $b = 23$ м, длины диагоналей x и y, тогда, по свойству параллелограмма (сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон) имеем: $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Пусть $x = 2k$, $y = 3k$, тогда $4k^2 + 9k^2 = 2(23^2 + 11^2)$,

$13k^2 = 1300$, $k^2 = 100$, $k = 10$.

Значит, $x = 20$, $y = 30$, т.е. длины диагоналей параллелограмма равны 20 м и 30 м.

№ 29

Указание. Записать систему в виде

$$\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=65,\\(x+y)(x-y)^2=5.\end{cases}$$

Далее ввести замену $(x-y)^2 = a$, $x + y = b$.

Получим $a = 1, b = 5$, после чего находим две пары решений: (3; 2), (2; 3).

№ 30

Указание. Учесть, что $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$.

Решая полученную систему $\begin{cases}a_1+d=7\\a_1+8d=21\end{cases}$, находим: $a_1 = 5, d = 2$.

№ 31

Ответ: –3,5.

№ 32

Указание. $D = b^2 - 4ac = 0$, или $9 - 2\cdot 2\cdot(17+m) = 0$, откуда $m = -15\frac{7}{8}$.

№ 33

Ответ: $p > n$.

№ 34

Решение. 100000 · 0,3 = 30000 (руб.);

$100000 - 30000 = 70000$ (руб.) — стоимость товара после I понижения.

$70000 - 21000 = 49000$ (руб.) — окончательная цена товара.

№ 35

Решение. По условию $a_1 = 4$, $d = 4$. Если число $a_n = 74$ является членом арифметической прогрессии, то

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{или } 74 = 4 + (n-1) \cdot 4,$$

откуда находим $n = 21{,}5$, что невозможно, так как $n \in N$.

№ 36

Решение.

$$\frac{4 \cdot 36^n}{2^{2n+2} \cdot 3^{2n-3}} = \frac{4 \cdot (6^2)^n}{2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 2^2 \cdot 3^{-3}} = \frac{6^{2n} \cdot 3^3}{6^{2n}} = 3^3 = 27.$$

№ 37

Решение. Точка N имеет координаты $(0; y)$, тогда имеем: $y = 4$, т.е. $N(0; 4)$. Так как график функции пересекает ось Ox в двух точках, то $y = 0$, тогда получим уравнение:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0, \text{или } x^2(x-1) - 4(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x^2-4) = 0, \quad (x-1)(x-2)(x+2) = 0,$$

откуда находим: $x_1 = 1; x_2 = 2, x_3 = -2$. Точки M и K симметричны относительно оси Oy, тогда $M(-2; 0)$, $K(2; 0)$.

Итак, $M(-2; 0)$, $N(0; 4)$, $K(2; 0)$.

№ 38

Решение. Пусть $a = 15$ дм — сторона правильного треугольника, тогда

$$S_{ф.} = \frac{\pi a^3}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \text{или } S_{ф.} = \frac{15^2}{6} \cdot (2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 40{,}5 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

№ 39

Ответ: $a \in (2; 4)$.

№ 40

Указание. Является, при $n = 3$.

№ 41

Решение.

I способ. Перемножив уравнения системы, получим

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25, \text{ или } (x^2 + y^2)^2 = 25.$$

Так как $x^2 + y^2 > 0$, то $x^2 + y^2 = 5$. (1)

Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 + y^2) = 10, \\ \dfrac{x}{y}(x^2 + y^2) = \dfrac{5}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Разделив почленно I уравнение системы (2) на II, имеем:

$$\frac{x^2}{y^2} = 4, \text{ или } x^2 = 4y^2. \quad (3)$$

Из соотношений (1) и (3) получим:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 = 4y^2 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x_{1,2} = \pm 2, \\ y_{1,2} = \pm 1. \end{cases}$$

II способ. Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10y, \\ y^2 + x^2y = 2{,}5x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x^2 + y^2) = 10y, \\ y(x^2 + y^2) = 2{,}5x, \text{ где } x \neq 0, \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Разделив I уравнение на II, получим

$$\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}, \text{ или } x^2 = 4y^2,\ x = \pm 2y.$$

Имеем две системы:

$$1) \begin{cases} x = 2y, \\ x^3 + xy^2 = 10y; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x = -2y, \\ -8y^3 - 2y^3 = 10y. \end{cases}$$

Из системы 1) находим $x_{1,2} = \pm 2$, $y_{1,2} = \pm 1$.

Система 2) не имеет решений.

Итак, решением исходной системы являются пары чисел (–2; –1) и (2; 1).

№ 42

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \dfrac{4}{3}\right] \cup [6; +\infty)$.

№ 43

Решение. Ввести замену $\sqrt{x} = y$, $y \geq 0$, тогда получим $\dfrac{y^2 - 3y - 4}{y^2 + 2y - 3} < 0$, или $\dfrac{(y-4)(y+1)}{(y+3)(y-1)} < 0$. Решая полученное неравенство методом интервалов, получим $1 < y < 4$, или $1 < \sqrt{x} < 4$, откуда $1 < x < 16$. Тогда $x = 15$ — наибольшее целое решение исходного неравенства.

№ 44

Решение. $\cos 20° \cos 40° \cos 80° =$

$$= \frac{1}{2\sin 20°} \cdot (2\sin 20° \cos 20°) \cos 40° \cos 80° =$$

$$= \frac{1}{2\sin 20°} \cdot \sin 40° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{4\sin 20°} \cdot \sin 80° \cdot \cos 80° =$$

$$= \frac{1}{8\sin 20°} \cdot (2\sin 80° \cos 80°) = \frac{1}{8\sin 20°} \cdot \sin 160° =$$

$$= \frac{1}{8\sin 20°} \cdot \sin(180° - 20°) = \frac{1}{8\sin 20°} \cdot \sin 20° = \frac{1}{8}.$$

№ 45

Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{8}$, $n \in Z$.

№ 46

Ответ: $x = 25$.

№ 47

Указание. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1(1-q^3)}{1-q}=26, \\ \dfrac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2}=364. \end{cases}$$

Разделив II уравнение на I, а затем I уравнение на полученное, имеем: $3q^2-10q+3=0$, откуда находим $q_1=3$, $q_2=\frac{1}{3}$ — не подходит, так как прогрессия возрастающая. Если $q=3$, то $b_1=2$.

№ 48

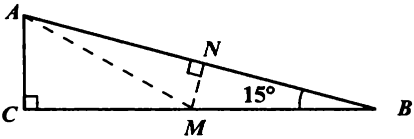


Рис. 75

Решение. **I способ.**

Пусть $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$. Проведем AM так, чтобы $\angle BAM=15°$, тогда $\angle AMC=\angle MAB+\angle MBA=30°$ (внешний угол ΔAMB); $AM=2AC=2b$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). Значит, и $MB=2b$. Построим $MN\perp AB$, тогда $\Delta MNB\sim\Delta ACB$ и $\frac{MB}{AB}=\frac{NB}{BC}$, или $\frac{2b}{c}=\frac{c}{2a}$, откуда $ab=\frac{1}{4}c^2$, и, так как $S_{\Delta ACB}=\frac{1}{2}ab$, то $S_{\Delta ACB}=\frac{1}{8}c^2$, что и требовалось доказать.

II способ. $a=c\cos15°$; $b=c\sin15°$, тогда

$$S_{\Delta ACB}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2\sin15°\cos15°=\frac{1}{4}c^2(2\sin15°\cos15°)=$$

$$=\frac{1}{4}c^2\sin30°=\frac{1}{8}c^2,\text{ ч. т. д.}$$

№ 49

Ответ: 1089.

№ 50

Решение. Если $a^2+a+1=0$, то, разделив обе части на $a\neq 0$, получим: $a+1+\frac{1}{a}=0$, откуда $a+\frac{1}{a}=-1$, тогда

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=-1;$$

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-1\cdot(-1)-(-1)=2;$$

$$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a^2}\right)=-1;$$

$$a^5+\frac{1}{a^5}=\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)=-1;$$

$$a^6+\frac{1}{a^6}=\left(a^5+\frac{1}{a^5}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)=2;$$

$$a^7+\frac{1}{a^7}=\left(a^6+\frac{1}{a^6}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^5+\frac{1}{a^5}\right)=-1, \text{ и т.д.}$$

Из этих соотношений видно, что для показателей степеней, кратных 3, значение выражения равно 2, а в остальных случаях равно –1. Поскольку 2007 кратно 3, то значение данного выражения равно 2.

№ 51

Решение (см. рис. 76).

$$y=\frac{(x-3)(x+3)}{|x-3|}+x^{2k-1-k+1}-x^k-2=\frac{(x-3)(x+3)}{|x-3|}-2.$$

$$D:\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq 3.\end{cases}$$

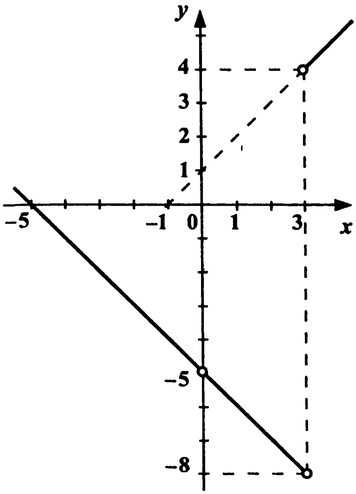


Рис. 76

1) $\begin{cases} x>3, \\ y=x+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<3, \\ y=-x-5. \end{cases}$

№ 52

Решение. $D: x\neq 0$.

$\cos 2007° = \cos(6\cdot 360° - 153°) = \cos 153° =$
$= \cos(180° - 27°) = -\cos 27°$.

$-\cos 27° + \cos 27° + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{|x|} = |x| - 3\cdot\frac{1}{2};$

$\frac{1}{|x|} = |x| - \frac{3}{2};\ \ 2|x|^2 - 3|x| - 2 = 0;$

$|x|_{1,2} = \frac{3\pm 5}{4},\ |x| = 2,\ x_{1,2} = \pm 2;\ |x| = -\frac{1}{2}$ — нет корней.

Итак, $x_{1,2} = \pm 2$ — корни исходного уравнения.

№ 53

Ответ: $\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{17}); -1\right)\cup(1; +\infty)$.

№ 54

Указание. Представить уравнение в виде

$$(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6})^2+(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6})=20.$$

Далее, решить заменой $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=y,\ \ y>0$.

Получим уравнение $y^2+y-20=0$, откуда $y_1=4, y_2=-5$ (не удовлетворяет условию $y>0$).

Если $y=4$, то $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=4$, откуда находим $x=3$ — корень исходного уравнения.

№ 55

Ответ: 3.

№ 56

Ответ: $[5;+\infty)$.

№ 57

Решение. Поскольку $\sqrt{3x^2+4}>0$ при любом $x\in R$, то $x-1>0$, т.е. $x>1$. Запишем данное неравенство в виде

$\sqrt{3x^2+4}\geq 4(x-1)$, и, так как обе части неравенства положительны, то, возведя в квадрат, получим равносильное неравенство

$$3x^2+4\geq 16x^2-32x+16,\ \text{или}\ 13x^2-32x+12\leq 0,$$

откуда $\dfrac{6}{13}\leq x\leq 2$.

Учитывая, что $x>1$, имеем $1<x\leq 2$.

№ 58

Ответ: $x=2\pi;\ x=\dfrac{5\pi}{2}$.

№ 59

Указание. $(\sqrt[4]{10x+4})^2=\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+2}$, где $x\geq 5$.

Решая полученное уравнение, находим $x_1 = 14$, $x_2 = -1$ (не подходит, так как $x \geq 5$). Итак, $x = 14$.

№ 60

Ответ: Существуют, например, со сторонами 25, 38 и 51 единиц.

№ 61

Решение. $D: \begin{cases} x \neq 0, \\ x \leq 4. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 0 < x \leq 4, \\ y = 2\sqrt{4-x}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ y = -2\sqrt{4-x}. \end{cases}$

Строим график (см. рис. 77).

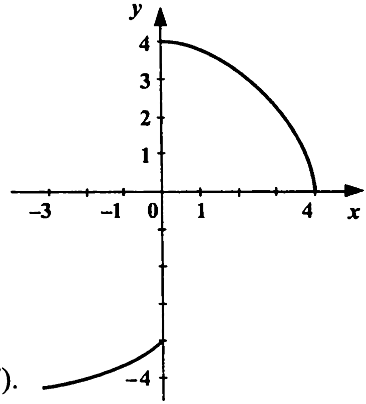


Рис. 77

№ 62

Решение. $D: ab > 0$, $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$;

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 3x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}};\ |\cos 3x| = \frac{a^2+b^2}{2ab},$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \geq 2ab \\ |\cos 3x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \cos 3x = \pm 1;\ 3x = \pi n,$$

откуда $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

№ 63

Решение. $D: x \neq \pm 2$.

$$\frac{x^2 + 4\operatorname{ctg}4^\circ(-\operatorname{tg}4^\circ)}{|x|-2} \geq x^2,\ \frac{x^2-4}{|x|-2} \geq x^2.$$

1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} \geq x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \leq 0, \end{cases}$

откуда получим $0 \leq x < 2$.

2) $\begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} \geq x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0, \end{cases}$

т.е. $-2 < x < 0$.

Следовательно, решением исходного неравенства является промежуток (–2; 0).

№ 64

Ответ: 1099.

№ 65

Указание. Использовать формулы $R = \dfrac{abc}{4S}$ и $r = \dfrac{S}{p}$, тогда $R \cdot r = \dfrac{abc}{4p}$.

Далее обозначить стороны треугольника:

$$a = x,\ b = x + 2,\ c = x + 4,\ \frac{abc}{4p} = \frac{x(x+4)}{6} = 130,$$

откуда $x = 26$ (корень $x = -30$ не подходит), т.е. $a = 26, b = 28$, $c = 30$. Зная стороны треугольника, находим площадь по формуле Герона: $S = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 14 \cdot 4 \cdot 6 = 336$ (кв. ед.).

№ 66

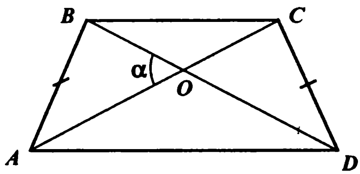


Рис. 78

Решение. Пусть в трапеции $ABCB$ $AB = CD$, $AC = BD = m$ и $\angle AOB = \alpha$; $AO = x$, $CO = y$.

Заметим, что

$S = 2S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} =$

$$=2\cdot\frac{1}{2}xy\sin\alpha+\frac{1}{2}y^2\sin(180^\circ-\alpha)+\frac{1}{2}x^2\sin(180^\circ-\alpha)=$$

$$=xy\sin\alpha+\frac{1}{2}y^2\sin\alpha+\frac{1}{2}x^2\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(x+y)^2\sin\alpha=\frac{1}{2}m^2\sin\alpha,\text{ где } x+y=AC=BD=m.$$

Итак, $S=\frac{1}{2}m^2\sin\alpha$, ч. т .д.

Замечание. Если $\alpha=90^\circ$, то $AC\perp BD$, и в этом случае $S=\frac{1}{2}m^2$, где m — длина диагонали.

№ 67

Ответ: 4.

№ 68

Указание. Заменой $\sqrt{x}=y$, где $y\geq 0$, данное неравенство приводится к виду $\frac{(y-4)(y+1)}{(y+3)(y-1)}<0$, откуда $1<y<4$, или $1<\sqrt{x}<4$, т.е. $1<x<16$.

№ 69

Решение. Область определения уравнения: $15\leq x\leq 97$.

Пусть $\begin{cases}\sqrt[4]{97-x}=a\\ \sqrt[4]{x-15}=b\end{cases}$, где $a\geq 0,\ b\geq 0$.

Тогда получим $a+b=4$. Учитывая подстановки, имеем $a^4=97-x$, $b^4=x-15$ и $a^4+b^4=82$.

Для нахождения a и b решаем систему уравнений:

$$\begin{cases}a+b=4,\\ a^4+b^4=82.\end{cases}$$

Но $a^4+b^4=((a+b)^2-2ab)^2-2a^2b^2=$

$=(16-2ab)^2-2a^2b^2=82,$

или $(16-2ab)^2-2a^2b^2=82,\ (ab)^2-32ab+87=0,$

откуда $(ab)_1=3;\ (ab)_2=29.$

Учитывая, что $a+b=4$, получим две системы:

1) $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$, $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$;

$x=b^4+15=97-a^4;\ x_1=16;\ x_2=96.$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

2) Решая аналогично систему $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=29 \end{cases}$, можно убедиться, что последняя не имеет решений. Итак, исходное уравнение имеет два корня: $x_1=16$; $x_2=96$.

№ 70

Указание. Согласно условию имеем уравнение

$$(64-x)-\frac{x(64-x)}{64}=49,$$

откуда $x_1=8$, $x_2=120$ (не подходит).

Итак, в I раз вылили 8 л спирта, а во II — $\frac{8\cdot(64-8)}{64}=7$ (л) спирта.

№ 71

Решение. Пусть $\overline{ab}=10a+b$ — искомое двузначное число, тогда $\overline{ba}=10b+a$ — число, записанное в обратном порядке.

По условию
$$10a+b=10ab+k$$
$$10b+a=2ab+k,$$

где k — остаток. Вычитая из I равенства II, получим:

$$9a=b(8a+9).$$

Так как $1\le a\le 9$, то нетрудно убедиться, что единственное значение a, при котором b будет целым будет $a=9$, тогда $b=1$. Искомое число 91.

№ 72

Решение. Из первой точки можно провести $(n-1)$ прямых линий ко всем остальным. Из второй точки можно провести $(n-2)$ прямых линий, так как прямая, идущая к первой точке, уже учтена. Из третьей точки можно провести $(n-3)$ прямых линий и т.д. Из последней точки нельзя будет провести ни одной прямой линии. Таким образом, число прямых линий представляет сумму членов арифметической прогрессии

$$S_n = (n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+3+2+1,$$

где $a_1 = n-1$, $a_n = 1$ и число членов $(n-1)$.

Тогда $S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot(n-1) = \dfrac{(n-1+1)}{2}\cdot(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

№ 73

Ответ: 1 см.

№ 74

Указание. Учесть ограниченность косинуса, тогда $\cos x = 1$, $\cos\dfrac{3x}{4} = 1$, откуда $x = 8\pi m,\ m \in Z$.

№ 75

Ответ: $(-\infty; 2)$.

№ 76

Указание. Выразить из I уравнения x через у и подставить во II уравнение. Далее, после упрощений получим, что условие задачи выполняется при $a = 2$ и $a = -1$.

№ 77

Указание. Заменой $\dfrac{1}{x} = a$, $\dfrac{1}{x+1} = b$ исходное уравнение сводится к решению системы $\begin{cases} a^3 - b^3 = \dfrac{7}{8} \\ \dfrac{a-b}{ab} = 1 \end{cases}$, откуда новой заменой $2ab = t$ получаем уравнение $t^3 + 6t - 7 = 0$, корень которого $t = 1$, тогда $ab = \frac{1}{2}$; $x_1 = -2, x_2 = 1$.

№ 78

Ответ: (0; 1,5),(3; 0).

№ 79

Решение. Пусть $\sqrt{1-\sqrt{x}} = 2y$, где $y \geq 0$.

Кроме того, $x \geq 0$, тогда $1-\sqrt{1-\sqrt{x}} \geq 0$, $1-\sqrt{x} \geq 0$, откуда $0 \leq x \leq 1$.

Так как $\sqrt{1-\sqrt{x}} = 2y$, то $\sqrt{x} = 1-4y^2$, $x = (1-4y^2)^2$, тогда данное уравнение примет вид

$$4(1-4y^2)^2 = (40-4y^2)(1-2y)^2,$$

откуда $$(1-2y)^2(5y^2+4y-9) = 0,$$

или 1) $(1-2y)^2 = 0$, $y = \frac{1}{2}$, тогда $x = (1-4y^2)^2 = 0$;

2) $5y^2 + 4y - 9 = 0$, откуда $y_{2,3} = \frac{-2 \pm 7}{5}$, $y_2 = 1$,

$y_3 = -\frac{9}{5}$ (не удовлетворяет, так как $y \geq 0$).

При $y = 0$, $x = 9$, но при этом $\sqrt{x} = 1-4 = -3 < 0$, что невозможно.

Итак, $x = 0$ — единственный корень уравнения.

№ 80

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

№ 81

Указание. Имеет место тождество:

$$(x^3+x+1)(ax^2+bx+c) = 2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n.$$

Далее раскрыть скобки и сгруппировать слагаемые при одинаковых степенях.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим: $a = 2$, $b = -1$, $a + c = 0$, откуда $m = -3$; $n = -2$.

№ 82

Ответ: 30°; 30°; 120°.

№ 83

Ответ: $x_{1,2} = \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{7})$.

№ 84

Указание. Представить уравнение в виде

$$(x+\sqrt{7})^2 + \left(y - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда находим $x = -\sqrt{7}$; $y = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

№ 85

Ответ: (4; 1),(1; 4).

№ 86

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(x - 2\cos(xy))^2 + 4(1 - \cos^2(xy)) = 0,$$

или $$(x - 2\cos(xy))^2 + (2\sin(xy))^2 = 0,$$

откуда $x - 2\cos(xy) = 0$ и $\sin(xy) = 0$, т.е. $x - 2\cos(xy) = 0$ и $\cos(xy) = \pm 1$.

Имеем две системы:

1) $\begin{cases} x - 2\cos(xy) = 0 \\ \cos(xy) = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ xy = 2\pi n \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2, \\ y = \pi n,\ n \in Z. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2\cos(xy) = 0 \\ \cos(xy) = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + 2 = 0, \\ xy = \pi + 2\pi k \end{cases}$, $\begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

№ 87

Ответ: при $a = 3$.

№ 88

Указание. Учесть, что $\sin 540° = \sin(3 \cdot 180°) = 0$, тогда уравнение после упрощений примет вид $\frac{|x|}{3} = \frac{1}{2}x^2$. Далее рассмотреть два случая, после чего находим $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$.

№ 89

Ответ: при $\alpha = 60°$.

№ 90

Решение. Допустим, что уравнение имеет рациональный корень $x_0 = \frac{m}{n}$, причем $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, тогда

$$\left(\frac{m}{n}\right)^5 - p\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^3 + 1 = 0. \qquad (1)$$

Умножим обе части (1) на n^3:

$$\frac{m^5}{n^2} - pm^3 + n^3 = 0, \text{ или } \frac{m^5}{n^2} = pm^3 - n^3. \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, то и $\frac{m^5}{n^2}$ — несократимая дробь, тогда как правая часть (2) есть целое число.

Следовательно, равенство (2) не может выполняться, а это и означает, что наше допущение неверно, т.е. исходное уравнение не имеет рациональных корней.

№ 91

Указание. Пара (0; 0) — решение системы. Пусть $xy \neq 0$, тогда, перемножив обе части системы, а затем, разделив на $x^3y^3 \neq 0$, получим:

$$8\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^3}{x^3}\right)=99.$$

Далее замена $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t$. В результате упрощений получим: $\frac{x}{y}=2$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, затем подстановкой во II уравнение исходной системы находим 5 пар решений: $(0;\ 0)$, $(\pm 2;\ \pm 1)$, $(\pm\sqrt[4]{2};\ \pm 2\sqrt[4]{2})$.

№ 92

Указание. Преобразовать данное выражение к виду

$$\frac{1}{6}(m+2)(m+3)(m+4),$$

откуда и следует требуемое.

№ 93

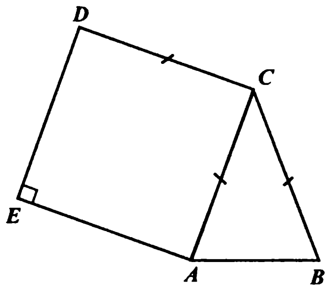


Рис. 79

Решение.

Пусть $AC=BC=CD=x$.

По условию $x^2=4S_{\Delta ABC}$. (1)

Но $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=$ $=\frac{1}{2}x^2\sin C$. Учитывая (1) получим:

$x^2=2x^2\sin C, x\neq 0, \sin C=\frac{1}{2}$, откуда $\angle C=30°$, тогда $\angle A=\angle B=75°$.

По следствию из теоремы синусов $\frac{AB}{\sin C}=2R$, откуда $R=\frac{y}{2\cdot\frac{1}{2}}=y$.

Известно, что $S_\Delta=p\cdot r$, где $p=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)=$

$=\frac{1}{2}(2x+y)$, тогда $r=\frac{S_\Delta}{p}=\frac{x^2}{2(2x+y)}$, тогда

$$\frac{R}{r}=\frac{2y(2x+y)}{x^2}. \qquad (2)$$

Но $\cos A=\dfrac{\frac{1}{2}y}{x}=\cos 75°$, или $y=2x\cos 75°$, тогда (2) примет вид:

$$\frac{R}{r}=8\cos 75°\cdot(1+\cos 75°). \qquad (3)$$

Но $\cos 75°=\cos(30°+45°)=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°=$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, тогда (3) примет вид:

$$\frac{R}{r}=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)=$$
$$=(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4=$$
$$=2(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1).$$

№ 94

Решение. При $a=b$ получим тождество. Пусть $a\neq b$.

Так как $a^2b^2=a+b$, то $a^2b^2(a-b)=(a+b)(a-b)$, или

$$a^3b^2-a^2b^3=a^2-b^2. \qquad (1)$$

Прибавим к обеим частям (1) $a^2b^2\neq 0$:

$$a^3b^2-a^2b^3+a^2b^2=a^2-b^2+a^2b^2$$

или $$a^2(b^3+b^2+1)=b^2(a^3+a^2+1),$$

откуда $$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^3+a^2+1}{b^3+b^2+1},$$ ч. т. д.

№ 95

Указание. Рассмотреть функцию $f(n)=\left(\frac{7}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n$. Далее установить, что неравенство выполняется при $n \geq 4$.

№ 96

Ответ: $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$.

№ 97

Решение.

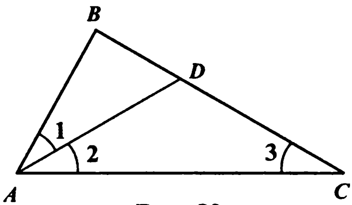


Рис. 80

I способ. Проведем биссектрису AD. Тогда $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

В ΔADC $AD=DC$.

Пусть $AB=x$, $AD=DC=y$, тогда $BC=x+2, BD=x+2-y$. Заметим, что $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle 1=\angle 3$).

Из подобия имеем:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}=\frac{AD}{AC}, \text{ или } \frac{x}{x+2}=\frac{x+2-y}{x}=\frac{y}{5}.$$

Для нахождения x и y получим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{y}{5}\\[2mm] \dfrac{x+2-y}{x}=\dfrac{y}{5}\end{cases}, \qquad \begin{cases}5x=xy+2y,\\ 5x+10-5y=xy\end{cases}$$

Вычитая из I уравнения II, получим $5y-10=2y$, откуда $y=\frac{10}{3}$, тогда $x=4$. Значит, $AB=4$ см, $BC=6$ см.

II способ. *Указание*. Применить теорему синусов.

№ 98

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{5}{16}\right)$.

№ 99

Решение. Преобразуем I уравнение системы:

$$12\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{4y}+\frac{5}{12z}\right)\cdot 12\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{5z}{12}\right)=144,$$

$$\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}\right)(4x+3y+5z)=144,$$

$$12\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+20\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+15\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=94. \qquad (1)$$

Но $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$; $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$; $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$, тогда (1) выполняется при условии, что $x = y = z = 2$. При этих значениях II уравнение исходной системы примет вид:

$$x^3 + 2x^2 + 3x = 22. \qquad (2)$$

Так как число 2 удовлетворяет (2), то

$$x^2(x-2) + 4x(x-2) + 11(x-2) = 0,$$

или
$$(x-2)(x^2 + 4x + 11) = 0,$$

откуда $x = 2$ — единственный корень уравнения (2), так как уравнение $x^2 + 4x + 11 = 0$ не имеет действительных корней.

Итак, исходная система имеет единственное решение (2; 2; 2).

№ 100

Решение. Обозначив данное выражение буквой A, имеем:

$$A=\frac{1\cdot 4\cdot 6\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots)}=\frac{1\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=4=2^2.$$

№ 101

Ответ: $CD = \sqrt{113-64\sqrt{3}} \approx 1{,}5$ см.

№ 102

Указание. Левую часть уравнения записать в виде:

$$x^3 + ax^2 + 56x - 64 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$= (x - m)(x - mq)(x - mq^2).$$

Далее раскрыть скобки и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m(1+q+q^2)=-a, \\ m^2q(1+q+q^2)=56, \\ mq=4 \end{cases}$$ откуда $mq=-\dfrac{56}{a}$ и так как $mq=4$,

то $-\dfrac{56}{a}=4$, откуда $a=-14$.

№ 103

Ответ: нет корней.

№ 104

Ответ: 1) $a=-7$; $b=-1$; 2) $a=-12$, $b=-2$.

№ 105

Решение. Заметим, что

$$\operatorname{tg}127°30'=\operatorname{tg}(180°-52°30')=-\operatorname{tg}52°30'.$$

Используя формулу $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, получим:

$$\operatorname{tg}127°30'=-\operatorname{tg}52°30'=\frac{\cos(60°+45°)-1}{\sin(60°+45°)}=$$

$$=\frac{\cos60°\cos45°-\sin60°\sin45°-1}{\sin60°\cos45°+\cos60°\sin45°}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}-1}{\frac{\sqrt{6}}{4}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)=$$

$$=\sqrt{3}-2-\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Тогда исходное выражение привет вид:

$$\operatorname{tg}127°30' + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} =$$
$$= \sqrt{3} - 2 - \sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = -2,$$ ч. т. д.

№ 106

Ответ: $\sqrt{mn}$.

№ 107

Ответ: $2(x^2 + y^2)(x^4 + 5x^2y^2 + y^4)$.

№ 108

Ответ: $\frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2)$.

№ 109

Ответ: $\frac{1}{3}(\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8})$.

№ 110

Решение. Пусть $\sqrt{2006} = a$, где $a > 0$, тогда $a^2 = 2006$ и $2007 = a^2 + 1$. Имеем:

$$x^9 - (a^2 + 1)x^3 + a = 0. \qquad (1)$$

Запишем уравнение (1) в виде:

$$x^3a^2 - a + (x^3 - x^9) = 0.$$

Полученное уравнение является квадратным относительно a: $D = 1 - 4x^3(x^3 - x^9) = (1 - 2x^6)^2$, откуда $a_1 = \frac{1}{x^3}(1 - x^6)$, $a_2 = x^3$.

Следовательно, имеем два уравнения:

1) $\frac{1}{x^3}(1 - x^6) = a$, $a > 0$; $x^6 + ax^3 - 1 = 0$, $D = a^2 + 4 > 0$,

$$x_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4})}.$$

Так как $a = \sqrt{2006}$, то $x_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2006} \pm \sqrt{2010})}$.

2) $x^3 = a$, $x = \sqrt[3]{a}$ или $x_3 = \sqrt[6]{2006}$.

Итак, исходное уравнение имеет три корня.

№ 111

Указание. Представить уравнение в виде

$$\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{x+2}{7x+2} = \frac{7}{2}. \qquad (1)$$

Далее заменой $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} = y$ привести уравнение (1) к виду $4y^3 - 7y^2 - 4 = 0$, корень которого $y = 2$ — единственный.

Тогда $\frac{7x+2}{x+2} = 4$, откуда $x = 2$ — корень исходного уравнения.

№ 112

Указание. Выразить левую часть через первый член и знаменатель прогрессии и т.д.

№ 113

Указание. Преобразовать уравнение к виду

$$(x - z)^2 + (x + y - 1)^2 + (x - y + 3)^2 = 0,$$

откуда находим: $x = -1$; $y = 2$; $z = -1$.

№ 114

Решение. Заметим, что $x \neq 0$, тогда данное уравнение запишем в виде

$$x + 19 = (x - 1)!$$

Пусть $x - 1 = y$, тогда $x = y + 1$ и $y + 20 = y!$ (1)

Очевидно, что $y = 4$ — корень уравнения (1). Учитывая, что $y!$ возрастает быстрее, чем $y + 20$, то при $y > 4$ уравнение (1) корней не имеет. Следовательно, $y = 4$ — единственный корень уравнение (1), тогда $x = y + 1 = 5$ — корень исходного уравнения.

№ 115

Указание. Показать, что если $x+\frac{1}{x}=y$, то $x^5+\frac{1}{x^5}=$ $=y^5-5y^3+5y$, $y\neq 0$.

Тогда получим уравнение $16y^4-80y^2-125=0$, откуда находим $y_{1,2}=\pm\frac{5}{2}$.

Далее решаем два уравнения $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ и $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$, откуда $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{2}$; $x_4=-2$.

№ 116

Решение. Запишем данное уравнение в виде $y^7=z^2-x^2$.

Заметим, что $y^7=\left(\frac{y^7+1}{2}\right)^2-\left(\frac{y^7-1}{2}\right)^2$. Полученное равенство является тождеством. При нечетном $y>1$, можно положить $z=\frac{1}{2}(y^7+1)$ и $x=\frac{1}{2}(y^7-1)$. Таким образом, всякая тройка чисел $\left(\frac{y^7-1}{2};y;\frac{y^7+1}{2}\right)$, где $y>1$ и y — нечетное число, является решением исходного уравнения.

Например, при $y=3$

$$z=1094,\ x=1093,$$

$$y^7=2187 \text{ и } 1093^2+2187=1094^2.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет сколько угодно решений в натуральных числах.

№ 117

Ответ: $\left[3;\frac{10}{3}\right)\cup(2;3)$.

№ 118

Указание. Показать, что данный многочлен имеет вид $(x^2 + Bx + Ca^2)^2$. Далее раскрыть скобки в обеих частях равенства, упростить и сравнить коэффициенты при x^3 и x, откуда находим $B = 5a$, $C = 5$, т.е. получим $(x^2 + 5ax + 5a^2)^2$.

№ 119

Ответ: $\left(-3; \pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $(2; \pm\sqrt{2})$.

№ 120

Ответ: $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$.

№ 121

Ответ: $3+\sqrt{2}$.

№ 122

Указание. $S=\dfrac{q_1}{1-q}$, где q — знаменатель прогрессии, тогда $S-q_1=\dfrac{q_1q}{1-q}=\dfrac{q_2}{1-q}$.

Разделив I равенство на II, получим требуемое.

№ 123

Решение. Искомая сумма равна $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ и может оканчиваться лишь одной из цифр: 0, 1, 3, 5, 6, 8.

Так что, цифрой 9 оканчивается не может.

№ 124

Ответ: 4567.

№ 125

Ответ: 147.

№ 126

Ответ: $r = 4d$.

№ 127

Решение (см. рис. 81).

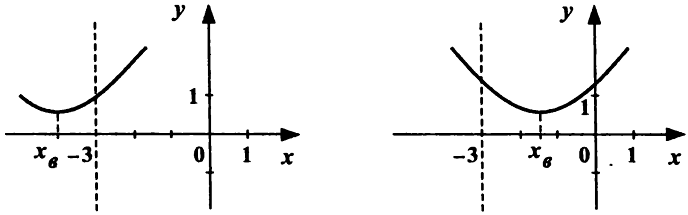


Рис. 81

Имеем две возможности расположения вершины параболы:

1. $x_в = a < -3$. Тогда наименьшее значение функции $y = x^2 - 4ax + 45$ достигается в точке $x = -3$.

Имеем: $y(-3) = 9 + 12a + 45 = 9$, откуда $a = -\frac{15}{4}$.

2. $x_в \geq -3$. Тогда наименьшее значение функции на $[-3; +\infty)$ достигается при $x = a$. Получим:

$$y(a) = a^2 - 4a^2 + 45 = 9,\ a^2 = 12,$$

откуда $a = 2\sqrt{3}$. Итак, $a = -\frac{15}{4}$; $a = 2\sqrt{3}$.

№ 128

Указание. Делится при $n = 2k$, $k \in N$. Рассмотреть два случая:

1) $n = 2k$ — четное; 2) $n = 2k + 1$ — нечетное.

№ 129

Указание. Преобразовать уравнение к виду $x = 7 + \frac{50}{y^2 - 7}$, откуда $y^2 - 7 = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 25, \pm 50$.

Далее находим лишь две пары целых чисел: (32; –3), (32; 2).

№ 130

Указание. Записать данное выражение в виде $27^{n+1} - 8^{n+1}$, откуда и следует требуемое.

№ 131

Решение. Так как $a \neq 0$, $b \neq 0$, то, умножив обе части данного неравенства на $a^3b^3 \neq 0$, получим:

$$a^9b^3 + a^3b^9 \leq a^{12} + b^{12},$$

или

$$(a^3 - b^3)(a^9 - b^9) \geq 0,$$

откуда $(a^3 - b^3)^2(a^6 + a^3b^3 + b^6) \geq 0$ — верно при любых $a \neq 0$; $b \neq 0$. Значит, верно и равносильное ему исходное неравенство.

№ 132

Указание. Умножить и разделить левую часть тождества на $2\sin\alpha$. Далее применить формулу синуса двойного угла.

№ 133

Решение.

$13! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 13 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 \cdot (12 \cdot 13) = 11! \cdot 12 \cdot 13;$

$13! - 11! = 11! \cdot (12 \cdot 13 - 1) = 11! \cdot 155 = 11! \cdot 5 \cdot 31$ — кратно 31, ч. т. д.

№ 134

Решение. Между корнями x_1, x_2 и x_3 данного уравнения существует зависимость:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

По условию задачи $x_1 + x_3 = 2x_2$, тогда, учитывая (1), имеем: $2x_2 + x_2 = -\frac{b}{a}$, откуда $x_2 = -\frac{b}{3a}$, ч. т. д.

№ 135

Ответ: $\frac{ab}{a+b}$.

№ 136

Решение. Пусть $\overline{AB}=\bar{c}$, $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$, тогда

$$\overline{AO}=\frac{1}{3}(\bar{c}-\bar{b}),\ \overline{BO}=\frac{1}{3}(\bar{a}-\bar{c}),\ \overline{CO}=\frac{1}{3}(\bar{b}-\bar{a}).$$

Значит, $\left(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2\right)-3\left(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2\right)=$

$$=\overline{a^2}+\overline{b^2}+\overline{c^2}-\frac{1}{3}\left((\bar{a}-\bar{b})^2+(\bar{b}-\bar{c})^2+(\bar{c}-\bar{a})^2\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overline{a^2}+\overline{b^2}+\overline{c^2}+2\overline{ab}+2\overline{bc}+2\overline{ac}\right)=\frac{1}{3}(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2,$$ ч. т. д.

№ 137

Решение. $$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)=\frac{a(a-b-c)^2}{4a^2}+\frac{b(a-b-c)}{2a}+c=$$

$$=\frac{(a-b-c)^2+2b(a-b-c)+4ac}{4a}=$$

$$=\frac{(a-b-c)(a-b-c+2b)+4ac}{4a}=$$

$$=\frac{(a-c)^2-b^2+4ac}{4a}=\frac{(a+c)^2-b^2}{4a}=$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b+c)}{4a}=\frac{f(-1)\cdot f(1)}{4a}=0.$$

10 класс

№ 1

Решение. Пусть x_0 — общий корень уравнений, тогда

$$x_0^3 + mx_0 = -1 \text{ и } x_0^4 + mx_0^2 = -1.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, имеем:

$$\frac{x_0^4 + mx_0^2}{x_0^3 + mx_0} = x_0 = 1,$$

тогда $1 + m \cdot 1 + 1 = 0$. Откуда $m = -2$.

№ 2

Решение.

Заметим, что сумма цифр всех однозначных и двузначных чисел равна $189 < 2007$, а сумма цифр всех трехзначных чисел $3 \cdot 900 = 2700 > 2007$.

Значит, цифра, стоящая на 2007 месте принадлежит к записи некоторого трехзначного числа. Пусть a — некоторое трехзначное число, тогда сумма цифр в последовательности от 1 до a равна $n = 189 + 3a$. Решим неравенство $n < 2007$.

Имеем $189 + 3a < 2007$, $3a < 1818$, $a < 606$. Последовательность чисел от 1 до 605 содержит $189 + 3 \cdot 605 = 2004$ цифр.

Следовательно, на 2007 месте стоит первая цифра числа 606, то есть 6.

№ 3

Решение. Заметим, что

$$4^7 + 7^{16} = 2^{14} + 7^{16} = 2^{14} + 2 \cdot 2^7 \cdot 7^8 + 7^{16} - 14^8 =$$
$$= (2^7 + 7^8)^2 - 14^8 = (2^7 + 7^8 + 14^4)(2^7 + 7^8 - 14^4).$$

№ 4

Ответ: $x = 4$.

№ 5

Решение.

$$x^6 - y^6 = (x - y)(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5) =$$

$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$,

откуда $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5 =$

$$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2).$$

№ 6

Решение.

$a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)=$

$=(a^2+b^2)((a^2+b^2)^2-3a^2b^2)=$

$=((a+b)^2-2ab)(a^2+b^2-\sqrt{3}ab)(a^2+b^2+\sqrt{3}ab)=$

$=((a+b)^2-2ab)((a+b)^2-(2+\sqrt{3})ab)((a+b)^2-(2-\sqrt{3})ab)$.

Так как ab и $a+b$ делятся на с (по условию), то каждый множитель делится на с, значит, произведение делится на c^3.

№ 7

Решение. На продолжении BM за точку M возьмем точку D так, что $MD = CM$. Тогда ΔCDM правильный и $CD \| KM$, поэтому $BM : MK = BD : DC = (BM + CM) : CM$, т.е. $\dfrac{1}{MK}=\dfrac{1}{CM}+\dfrac{1}{BM}$.

№ 8

Указание. Из условия $7a+13b=47$ имеем $a=\frac{1}{7}(47-13b)$, тогда исходное неравенство примет вид

$$20\cdot\left(\frac{1}{7}(47-13b)^2+13b^2\right)\ge 2209,$$

откуда имеем $5200b^2-2440b+28717\ge 0$, или $400b^2-1880b+$ $+2209\ge 0$, или $(20b-47)^2\ge 0$, верно при любом b, а значит, верное и исходное неравенство.

№ 9

Решение.

Пусть $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2006}{2007}=A_1$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}=A_2$.

Так как $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ldots\frac{2006}{2007}<\frac{2007}{2008}$, то

$A_1^2 < A_1 \cdot A_2 = \frac{1}{2008}$.

Следовательно $A_1 < \frac{1}{\sqrt{2008}} < \frac{1}{44}$.

№ 10

Ответ: существует $h = 12, c = 13, b = 14, a = 15$.

№ 11

Указание. Записать уравнение в виде $\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x = 1$.

Учитывая свойство монотонности функций, находим $x = 2$.

№ 12

Ответ: 4 и 21.

№ 13

Решение. Так как $|\cos\alpha| \le 1$ при любом $\alpha \in R$, то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos x = 1\\ \cos 7 = 1\end{cases}, \quad \begin{cases}x = 2\pi n,\ n \in Z\\ 7x = 2\pi k,\ k \in Z\end{cases}, \quad \begin{cases}x = 2\pi n,\\ x = \dfrac{2\pi k}{7},\end{cases}$$

откуда $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

№ 14

Решение. Пусть $AB = c, AC = b, BC = a$, причем $a < b < c$. Так как по условию задачи стороны a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то $a + c = 2b$. (1)

По теореме синусов $\frac{b}{\sin\angle B} = 2R$, откуда $b = 2R\sin\angle B$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r = \frac{abc}{4R}$, или $\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{abc}{4R}$, или, учитывая (1), имеем:

$$\frac{3}{2}br=\frac{abc}{4R},\text{ откуда } ac=6Rr. \qquad (2)$$

По теореме косинусов

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle B,$$

$$b^2=(a+c)^2-2ac-2ac\cos\angle B,$$

или

$$12Rr(1+\cos\angle B)=12R^2\sin^2\angle B;$$

$$2ac(1+\cos\angle B)=3b^2.$$

Учитывая (2) находим: $12Rr(1+\cos\angle B)=3b^2$, и, так как $b=2R\sin\angle B$, то $12Rr(1+\cos\angle B)=12R^2\sin^2\angle B$,

$$r(1+\cos\angle B)=R\sin^2\angle B,$$

или

$$r(1+\cos\angle B)=R(1-\cos\angle B)(1+\cos\angle B).$$

Но $1+\cos\angle B\neq 0$, так как $\angle B\neq 180^\circ$, тогда $r=R(1-\cos\angle B)$, откуда $1-\cos\angle B=\frac{r}{R}$.

По условию задачи $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, откуда $\cos\angle B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значит, $\angle B=30^\circ$.

№ 15

Решение. Запишем уравнение в виде пропорции

$$\frac{x^3y^3+x^2+y^2}{xy^3+1}=\frac{1753}{193},$$

или

$$\frac{x^2(xy^3+1)+y^2}{xy^3+1}=\frac{193\cdot 9+16}{193}.$$

В полученном уравнении выделим целую часть

$$x^2+\frac{y^2}{xy^3+1}=9+\frac{16}{193},\text{ или } x^2+\frac{1}{xy+\frac{1}{y^2}}=9+\frac{1}{12+\frac{1}{16}}.$$

Известно, что всякое натуральное число можно представить в виде цепной дроби единственным образом.

Тогда $x^2=9$, $xy=12$, $y^2=16$, т.е. $x=3$, $y=4$.

№ 16

Решение. Пусть $\overline{xyzt} = 1000x + 100y + 10z + t$.

По условию $x = z$, $y = t$, тогда

$1000x + 100y + 10z + t = 1000x + 100y + 10x + y =$

$= 1010x + 101y = 101 \cdot (10x + y)$ — кратно 101.

№ 17

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{101^{99}}{100^{100}} = \frac{101^{100} \cdot 101^{-1}}{100^{100}} = \left(\frac{101}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} =$$

$$= \left(\frac{100+1}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \cdot 101^{-1} < 3 \cdot 101^{-1} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 101^{99} < 100^{100}$, т.е. $100^{100} > 101^{99}$.

Замечание. Здесь мы использовали тот факт, что

$$2 \le \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < 3.$$

№ 18

Решение. Если искомая последовательность существует, то ее можно представить в виде

$$a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + k) = 100. \qquad (1)$$

Левая часть (1) представляет собой возрастающую арифметическую прогрессию, где $a_1 = a$; $a_n = a + k$; $n = k + 1$; $S_n = 100$.

Замечание. Из $a_n = a + k$ получаем $n = k + 1$.

По формуле суммы n – членов арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = S_n, \text{ или } \frac{a + a + k}{2} \cdot (k + 1) = 100,$$

откуда $$(2a + k)(k + 1) = 200. \qquad (2)$$

Заметим, что $(2a + k) - (k + 1) = 2a - 1$ – нечетно, следовательно, один из множителей четен, а другой – нечетен.

Кроме того, $2a + k > k + 1$ и для числа 200 получим разложение, удовлетворяющее (2):

$$200 = 200 \cdot 1 = 40 \cdot 5 = 25 \cdot 8.$$

Следовательно, имеем:

1) $\begin{cases} 2a+k=200 \\ k+1=1 \end{cases}$, откуда $k = 0$ не удовлетворяет, так как получим одно число.

2) $\begin{cases} 2a+k=40 \\ k+1=5 \end{cases}$, $\begin{cases} a=18 \\ k=4 \end{cases}$, откуда получим последовательность $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$.

3) $\begin{cases} 2a+k=25 \\ k+1=8 \end{cases}$, $\begin{cases} a=9 \\ k=7 \end{cases}$,

т.е. $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 16 = 100$.

Таким образом, существуют две последовательности, удовлетворяющие условию задачи:

а) $18 + 19 + ... + 22 = 100$;

б) $9 + 10 + ... + 16 = 100$.

№ 19

Указание. Если X — искомое пятизначное число и k — приписываемое число, то получим:

$$\frac{10X+k}{X+k \cdot 100000} = 3,$$

откуда $X = k \cdot 42857$, где $0 < k \leq 9$.

Условию задачи удовлетворяют два числа 42857 и 85714.

№ 20

Решение. Пусть r_1 — радиус нижнего основания, r_2 — верхнего, R — радиус шара, α — искомый угол между образующей и плоскостью основания. Согласно условию задачи имеем:

$$2r_1 + 2r_2 = 5R. \qquad (1)$$

Но $r_1 = R\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $r_2 = R\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, тогда (1) примет вид

$$2R\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2R\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 5R, \text{ или } 2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 5\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + 2 = 0,$$

откуда находим: $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$ или $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 2\mathrm{arctg}2$ — не подходит, так как $2\mathrm{arctg}2 > \frac{\pi}{2}$, что невозможно.

Значит $\alpha = 2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$.

№ 21

Указание. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{85}}{4}$, $x_1x_2 = \frac{21}{16}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения. Пусть для определенности $x_1 > x_2$, тогда

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2). \qquad (1)$$

Но $x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{1}{4}$, тогда

(1) примет вид $x_1^3 - x_2^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \frac{21}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1+63}{64} = 1.$

№ 22

Указание. Заменой $\frac{x+y}{5} = \frac{x+z}{6} = \frac{y+z}{7} = t$, второе уравнение системы примет вид $25t^2 + 36t^2 + 49t^2 = 110$, откуда находим $t = \pm 1$. Далее, решая две полученные системы уравнений, получим две тройки решений: (–2; –3; –4), (2; 3; 4).

№ 23

Ответ: 832.

№ 24

Указание. $(x^2 + x)^2 = |x^2 + x|^2$.

Обозначив $|x^2 + x| = t$, где $t > 0$, получим $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = 1$, ($t_2 = -2$ – не подходит). Далее, решая уравнения $x^2 + x - 1 = 0$ и $x^2 + x + 1 = 0$ (не имеет действительных корней), находим $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

№ 25

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

№ 26

Ответ: $0 < x < 1$.

№ 27

Решение. По условию задачи точка N — середина DC.

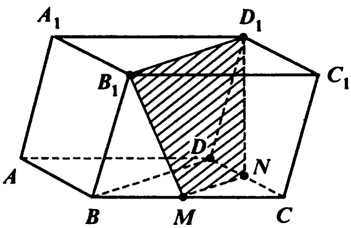


Рис. 82

Известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Значит, плоскость сечения пересечет основания $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ по параллельным отрезкам. Проведем BD, $BD \| B_1D_1$.

Из точки N проводим $MN \| BD$, значит $MN \| B_1D_1$. Соединим точки B_1 и M, D_1 и N, тогда B_1D_1NM — искомое сечение. Таким образом, в четырехугольнике B_1D_1NM имеем $B_1D_1 \| NM$, значит B_1D_1NM — трапеция (по определению).

№ 28

Решение. Заменой $x = ty$ данная система приводится к виду:

$$\begin{cases} y^2(3t^2 + 2t + 1) = 11, \\ y^2(t^2 + 2t + 3) = 17. \end{cases}$$

Разделив I уравнение на II и, упростив полученное уравнение, получим:

$$10t^2 + 3t - 4 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $t_1 = -\frac{4}{5}$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

Если $t = -\frac{4}{5}$, то из II уравнения системы находим $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$, тогда $x = ty$, или $x_{1,2} = \mp\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Аналогично, при $t = \frac{1}{2}$ находим $y_{3,4} = \pm 2$ и $x_{3,4} = \pm 1$.

Итак, исходная система имеет 4 пары решений:

$$\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}, \mp\frac{5}{\sqrt{3}}\right),\ (\pm 1, \pm 2).$$

№ 29

Решение. Пусть x и y — соответственно цифры сотен и десятков, тогда искомое число имеет вид $100x + 10y + 5$.

Если цифру 5 перенести на I место, то получим число вида $500 + 10x + y$.

Согласно условию, получим уравнение

$$100x + 10y + 5 - (500 + 10x + y) = \overline{aaa},$$

где $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a$ – трехзначное число с одинаковыми цифрами, тогда $100x + 10y + 5 - 500 - 10x - y = 111a$,

или $$3(10x + y - 55) = 37a. \qquad (1)$$

Так как число 37 простое, то a кратно 3, т.е. $a = 3k$, где $1 \le a \le 9$, тогда $1 \le 3k \le 9$, откуда $k = 1, 2, 3$ ($k \in N$).

Соотношение (1) примет вид

$$10x + y - 55 = 37k.$$

Имеем 3 возможности:

1. Если $k = 1$, то $10x + y = 92$, что выполняется лишь при $y = 2$, $x = 9$, так как $1 \le x \le 9$, $1 \le y \le 9$.

Искомое число 925.

2. Если $k = 2$, то $10x + y = 129$ — не имеет решений при указанных ограничениях.

3. Если $k = 3$, то $10x + y = 166$, также не имеет решений при указанных ограничениях.

Итак, условию задачи удовлетворяет единственное число 925.

№ 30

Указание. Умножить обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части уравнения. Полученное уравнение решить с данным как систему способом сложения. Решая полученное уравнение находим единственный корень уравнения $x = 0$.

№ 31

Указание. Разложить заданное число на множители. Тогда получим $13^3 \cdot 3 \cdot 61$ —делится на 61.

№ 32

Решение. Поскольку $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x - 1)^3 + 2$, то $y = (x - 1)^3 + 2$.

График этой функции может быть получен из графика функции $y = x^3$ параллельным переносом. Так как у графика функции $y = x^3$ начало координат (0; 0) — центр симметрии, то у исходного графика функции центром симметрии будет точка (1; 2).

№ 33

Ответ: $16\sqrt{2}$ дм^2.

№ 34

Решение. Запишем уравнение в виде

$$16x^2 - 24x\sqrt{x+13} + 9(x+13) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) можно решить разными способами.

I способ (выделение в левой части полного квадрата).

$$(4x - 3\sqrt{x+16})^2 = 0, \text{ или } 4x = 3\sqrt{x+13},$$

$x > 0 \Rightarrow$ из условия исходного уравнения, так как $16x^2 + 9x + 117 > 0$ при всех $x \in R$ и $x + 13 \geq 0$.

Далее имеем: $16x^2 = 9(x+13)$, или $16x^2 - 9x - 117 = 0$, откуда находим $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{78}{32} < 0$ (не подходит). Найденный корень $x = 3$ удовлетворяет исходному уравнению.

II способ (замена переменной).

Заметим, что при $x = 0$ и при $x = -13$ равенство (1) не выполняется, тогда, разделив обе части (1) на $x\sqrt{x+13} \neq 0$, получим $16 \cdot \frac{x}{\sqrt{x+13}} + 9 \cdot \frac{\sqrt{x+13}}{x} - 24 = 0$.

Далее заменой $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = y$, где $x > 0$, тогда $y > 0$ получим после преобразований $(4y - 3)^2 = 0$, откуда $y = \frac{3}{4}$, тогда $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = \frac{3}{4}$, $4x = 3\sqrt{x+13}$ и т.д. (см. I способ).

III способ (приведение к однородному).

Пусть $\sqrt{x+13} = y$, тогда $9x + 117 = 9(x + 13) = 9y^2$, и данное уравнение примет вид $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$, или $(4x - 3y)^2 = 0$ и т.д., аналогично II способу.

Итак, $x = 3$ — корень исходного уравнения.

№ 35

Указание. Учесть, что $x - 7 > 0 \Rightarrow x - 4 > 0$ и $x - 3 > 0$, тогда $x - 4 + x - 3 = x - 7$, откуда $x = 0$ – не подходит, так как $x > 7$. Значит, исходное уравнение не имеет корней.

№ 36

Решение. Пусть четырехзначное число имеет вид $\overline{abcd}$. По условию $13 \cdot \overline{abcd}$ — точный куб, тогда $13 \cdot \overline{abcd}$ имеет вид $(13k)^3$. Значит, $\overline{abcd} = 13^2 \cdot k^3$, т.е. $\overline{abcd}$ кратно $13^2 = 169$.

Но $1000 : 169 = 5{,}9\ldots > 5$,

$9999 : 169 = 59{,}1\ldots < 60$, т.е. $5 < k < 60$.

Нетрудно заметить, что между числами 5 и 60 находятся лишь два числа — 8 и 27, являющиеся точными кубами. Следовательно имеем две возможности:

1) $169 \cdot 8 = 1352$; 2) $169 \cdot 27 = 4563$.

Действительно, $1352 \cdot 13 = 13 \cdot 13^2 \cdot 2^3 = 26^3 = 17576$,

$4563 \cdot 13 = 13 \cdot 13^2 \cdot 3^3 = 39^3 = 59319$.

№ 37

Указание. Использовать теорему Виета и формулу

$$x_1^5 - x_2^5 = (x_1 - x_2)(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4).$$

Тогда получим $x_1^5 - x_2^5 = 61$.

№ 38

Ответ: 15.

№ 39

Ответ: $18\pi(2 - \sqrt{3})$ дм^2.

№ 40

Ответ: 247; 364; 481; 715; 832.

№ 41

Решение. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Известно, что $S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A$. Кроме того, по теореме косинусов имеем $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$, откуда $bc = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cos\angle A}$, тогда $S = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{tg}\angle A$.

По условию задачи $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$ или, сравнивая правые части полученных равенств, имеем

$$\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)\operatorname{tg}\angle A=\frac{\sqrt{3}}{4}(b^2+c^2-a^2),$$

откуда имеем две возможности:

1) $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, т.е. $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ прямоугольный, где a — гипотенуза, b и c — катеты, тогда $\angle A = 90°$. Но равенство $b^2 + c^2 = a^2$ невозможно, так как тогда, учитывая условие задачи, получим $S = 0$.

2) $b^2 + c^2 - a^2 \neq 0$, тогда имеем $\operatorname{tg}\angle A = \sqrt{3}$, значит, $\angle A = 60°$.

№ 42

Указание. Записать уравнение в виде

$$x-\sqrt{x-3}=\sqrt[4]{x-3}\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x-3}\right).$$

Решая полученное уравнение разложением левой части на множители, получим $x_1 = 4$, $x_2 = 12$. Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

№ 43

Ответ: (4; 1), (1; 4).

№ 44

Указание. Данное уравнение равносильно двум смешанным системам:

1) $\begin{cases} x^3-2x\geq 0, \\ x^3-2x=2x+15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-2x<0. \\ 2x-x^3=2x+15. \end{cases}$

Система 1) не имеет решений, а из системы 2) находим $x_1 = 3$, $x_2 = -\sqrt[3]{15}$.

№ 45

Ответ: $(-\infty; 1]\cup\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

№ 46

Ответ: $(-\infty; 0]\cup(3; +\infty)$.

№ 47

Решение. Пусть в равнобедренном ΔABC основание $AB = 2x$, $AC = BC = y$, высота $CD = 12$ (по условию), тогда из ΔADC получим $y^2 - x^2 = 144$. (1)

Известно, что $S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R}$, где $a = b = y$, $c = AB = 2x$,

тогда
$$S_{\Delta ABC} = \frac{xy^2}{2R}. \qquad (2)$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r = (x + y)r$. (3)

Кроме того,
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 12x. \qquad (4)$$

Учитывая (4), соотношения (2) и (3) примут вид
$$\frac{xy^2}{2R} = 12x \ \text{ или } \ y^2 = 24R,$$
$$R = \frac{y^2}{24}. \qquad (5)$$

Аналогично из (3) имеем $(x + y)r = 12x$, откуда
$$r = \frac{12x}{x + y}. \qquad (6)$$

По условию задачи $R + r = \dfrac{83}{8}$, тогда, складывая (5) и (6), получим $\dfrac{12x}{x+y} + \dfrac{y^2}{24} = \dfrac{83}{8}$ или, учитывая (1) имеем систему уравнений:
$$\begin{cases} \dfrac{12x}{x+y} + \dfrac{y^2}{24} = \dfrac{83}{8}, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$

Пусть $y = tx$, где $t > 0$, тогда получим

$$\begin{cases} \dfrac{12}{1+t} + \dfrac{t^2x^2}{24} = \dfrac{83}{8}, \\ x^2 = \dfrac{144}{t^2-1}. \end{cases}$$

Решив систему способом подстановки, получим после упрощения уравнение $35t^2 - 96t + 13 = 0$, корни которого $t_1 = \dfrac{13}{5}$, $t_2 = \dfrac{1}{7}$.

Учитывая подстановку $y = tx$, получим две системы:

1) $\begin{cases} y = \dfrac{13}{5}x, \\ y^2 - x^2 = 144; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{7}x, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$

Из системы 1) имеем: $x = 5$, $y = 13$.

Система 2) не имеет решений.

Итак, $x = 5$, $y = 13$, тогда $AB = 2x = 10$ и $AC = BC = 13$.

№ 48

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$\begin{cases} \sin\dfrac{5x}{4} = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{5x}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = 2\pi k \end{cases}$, $2\pi k = \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{8\pi n}{5}$,

откуда $k = \dfrac{1}{5}(4n+1)$.

Так как $k \in Z$, то $n = 1 + 5m$, $m \in Z$.

Тогда $x = 2\pi + 8\pi m$, $m \in Z$.

№ 49

Решение. $7\sin\beta = 6\sin\beta + \sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$,

или $6\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta = 2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$. (1)

С другой стороны, $7\sin\beta = 8\sin\beta - \sin\beta$,

или $8\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta) + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha$. (2)

Разделив обе части (2) на (1), получим: $\frac{4}{3}=\text{tg}(\alpha+\beta)\text{ctg}\alpha$, откуда $3\text{tg}(\alpha+\beta)=4\text{tg}\alpha$.

№ 50

Указание. После почленного возведения уравнения в куб и подстановки $\sqrt[3]{x-1}$ вместо $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$, получим:

$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)}=-(x+1),$$

или
$$(x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3,$$

откуда $x_1=-1$, $(3x+1)(x-1)=-(x+1)^2$, или $4x^2=0, x^2=0$.

Проверка показывает, что $x=0$ — посторонний корень, а $x=-1$ — корень исходного уравнения.

№ 51

Решение. $y=1\cdot\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$.

$$\begin{cases}\cos\neq 0\\ y=|\cos x|\end{cases},$$

$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

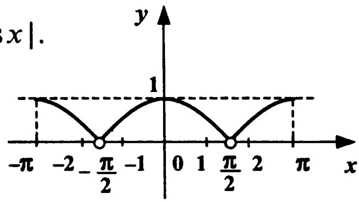


Рис. 83

№ 52

Решение. Так как $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, то уравнение примет вид:

$$\cos(\pi\sqrt{x^2-4x-5})=1.$$

Полученное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases}x^2-4x-5\geq 0\\ \pi\sqrt{x^2-4x-5}=2\pi n,\ n=0,1\ldots\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-4x-5\geq 0,\\ x^2-4x-5=4n^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\leq -1,\ x\geq 5,\\ x^2-4x-(5+4n^2)=0;\end{cases}\quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+(5+4n^2)},$$

или $x_{1,2}=2\pm\sqrt{9+4n^2}$, $n=0,1\ldots$

№ 53

Указание. Учесть, что $\sin 180° = 0$, $\operatorname{ctg} 45° = 1$ и $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, тогда получим $0 + 1 + |x - 2| \geq 5$, или $|x - 2| \geq 4$,

откуда $\left[\begin{array}{l} x - 2 \geq 4 \\ x - 2 \leq -4 \end{array}\right.$; т.е. $x \geq 6$; $x \leq -2$.

№ 54

Решение. Пусть в прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$), $AB = c$, $AD = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$ — биссектриса $\angle A$.

Пусть $\angle CAD = \alpha = \angle DAB$.

Из $\Delta\, ACD: AC = AD\cos\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{3}}\cos\alpha$.

Из $\Delta\, ABC$ $AC = AB\cos 2\alpha = c\cos 2\alpha$

Сравнивая правые части, имеем:

$$\frac{c}{\sqrt{3}}\cos\alpha = \cos 2\alpha \text{ или } \sqrt{3}\cos 2\alpha - \cos\alpha = 0.$$

Поскольку $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, то полученное уравнение примет вид:

$$2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0,$$

откуда находим $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Заметим, что $\angle A < 90°$, тогда $\cos\alpha > 0$, так что значение $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ не подходит.

Если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha = 30°$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = 30°$; $\angle CAB = 60°$ и $\angle B = 30°$.

Следовательно, $AC = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}c$; $BC = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

Замечание. Попытка решить задачу алгебраическим способом приводит к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными, например: $AC = x$, $BC = y$, $CD = z$, тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = \frac{1}{3}c^2, \\ \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z}, \text{ и т.д.} \end{cases}$$

№ 55

Указание. Рассмотреть разность $\sin 10 - \sin 9$ и учесть, в какой угловой четверти находятся полученные углы. Тогда получим $\sin 10 - \sin 9 < 0$, т.е. $\sin 9 > \sin 10$.

№ 56

Указание. Применить формулу $\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$.

Тогда исходное уравнение после упрощений примет вид:

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{100 - 4\operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} \right) = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg}^2 x = 25, \end{array} \right. \\ \operatorname{tg}^2 x \neq \frac{1}{3}, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$$

или $x = \pi n$, $n \in Z$, $x = \pm \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in Z$.

№ 57

Ответ: $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right], n \in Z.$

№ 58

Ответ: [0,5; 2,5]

№ 59

Решение.

I способ. Идея решения задачи заключается в сравнении площадей $S = \frac{1}{2}ab = pr = \frac{1}{2}(a+b+c)r$, откуда

$$r = \frac{ab}{a+b+c}. \qquad (1)$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, или $(a + b)^2 - 2ab = c^2$ значит, $2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$, тогда (1) примет вид:

$$r = \frac{2ab}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}, \text{ ч. т. д.}$$

II способ. Из центра O вписанной окружности проведем радиусы OD, OE и OF в точки касания, тогда $OD \perp AC$, $OF \perp BC$, $OE \perp AB$.

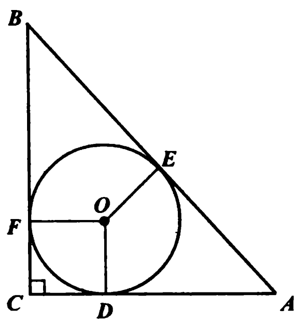


Рис. 84

Следовательно, $CFOD$ — квадрат, тогда $OD = OF = OE = r$;

$$AD = AC - CD = b - r,$$
$$BF = BC - FC = a - r.$$

Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки.

Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB = AE + BE$,

т.е. $c = (b - r) + (a - r)$, откуда $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, ч. т. д.

№ 60

Ответ: 54 и 18.

№ 61

Указание. Учесть, что $\Delta AKD \sim \Delta EKD$, где точка K — точка пересечения DB и AE ($E \in CB$). В результате получим, что $BK : KD = 3 : 8$.

№ 62

Указание. Разложить $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ на множители. Далее использовать формулы

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Тогда получим: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$.

№ 63

Решение. Заметим, что при $x > 1$ определена левая часть неравенства. Пусть $\sqrt[3]{2-x} = t$, тогда $t^3 = 2 - x$ и $x - 1 = 1 - t^3$. Имеем неравенство

$$t + \sqrt{1-t^3} > 1, \text{ или } \sqrt{1-t^3} > 1 - t,$$

или $1 - t > 1 - 2t + t^2$; $t(t^2 + t - 1) < 0$; $t(t + 1)(t - 1) < 0$, откуда $0 < t < 1$; $t < -2$.

Значит:

1) $0 < \sqrt[3]{2-x} < 1$, $0 < 2 - x < 1$, $1 < x < 1$.

2) $\sqrt[3]{2-x} < -2$, $2 - x < -8$, $x > 10$.

Тогда решением исходного неравенства будет объединение полученных решений: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

№ 64

Указание. Согласно условию

$100x + 10y + z = 3(\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{xz})$, или $40x = 23y + 5z$, откуда $\Rightarrow$, что y — кратно 5 и так как $0 \le y \le 9$, то $y = 5$, тогда $8x = 23 + z$.

Поскольку $0 \le z \le 9$, $0 \le x \le 9$, то $23 \le 8x \le 32$, откуда $2\frac{7}{8} \le x \le 4$, т.е. $x = 3$ и $x = 4$.

Если $x = 3$, то $z = 1$, тогда искомое число 351; если $x = 4$, то $z = 9$, получим число 459. Итак, искомые числа 351 и 459.

№ 65

Указание.

Данную функцию привести к виду: $y = |x - 2|$, где $\cos x \ne 0$,

т.е. $\begin{cases} y = |x - 2| \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z. \end{cases}$

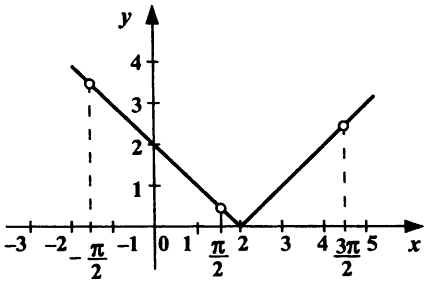


Рис. 85

№ 66

Указание. Рассмотреть 2 случая:

1) $x > 0$, тогда получим $x = 1$.
2) $x < 0$, тогда получим $x = -0{,}5$.

Значит, исходное уравнение имеет два корня: 1 и –0,5.

№ 67

Решение. $D: x \ne 0$.

$\sqrt{(3x-1)^2} > \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3}$;

$|3x-1| > |\sqrt{3}+1| - \sqrt{3}$; $|\sqrt{3}+1| > 0$, тогда $|3x-1| > 1$,

откуда $\left[\begin{array}{l} 3x-1>1 \\ 3x-1<-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>2/3 \\ x<0 \end{array}\right.$

Значит, $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

№ 68

Указание. Подстановкой $x = a + y$ первое уравнение системы привести к виду $4y^2 + 2ay + (a^2 - 1) = 0$

Условие задачи выполняется, если $D/4 = 0$, откуда находим $a = \pm 2\sqrt{3}$.

№ 69

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt[3]{1+\frac{56}{x}}+4\sqrt[3]{1+\frac{19}{x}}=8. \qquad (1)$$

Пусть $1+\dfrac{56}{x}=a^3$, $1+\dfrac{19}{x}=b^3$, откуда

$$\begin{cases}\dfrac{56}{x}=a^3-1 & \Big|\cdot 19\\ \dfrac{19}{x}=b^3-1 & \Big|\cdot 56\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{56\cdot 19}{x}=19(a^3-1)\\ \dfrac{19\cdot 56}{x}=56(b^3-1)\end{cases},$$

значит, $$19\,(a^3 - 1) = 56\,(b^3 - 1),$$

или $$19a^3 - 56b^3 = -37. \qquad (2)$$

Кроме того, с учетом подстановок, уравнение (1) примет вид:

$$a + 4b = 8. \qquad (3)$$

Равенства (2) и (3) рассматриваем как систему:

$$\begin{cases}19a^3-56b^3=-37,\\ a+4b=8.\end{cases}$$

Здесь удобно выразить из II уравнения b через a (а не наоборот).

$b=2-\dfrac{a}{4}$, тогда I уравнение после упрощений запишется в виде:

$$159a^3 - 168a^2 + 1344a - 3288 = 0. \qquad (4)$$

Нетрудно проверить, что $a = 2$ — корень уравнения (4).

Тогда получим:

$$(a-2)(159a^2+150a+1644)=0.$$

Заметим, что уравнение $159a^2 + 150a + 1644 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D/4 < 0$. Так как $\frac{56}{x}=a^3-1$ и $a = 2$, то $\frac{56}{x}=7$, откуда $x = 8$ — единственный корень исходного уравнения.

№ 70

Решение. $x^2 + y^2 + xy = (x - py)^2$, $y \in N$, откуда $x^2 + 2px = = p^2y - y$, или $y=\frac{x(2p+1)}{p^2-1}$, где $p > 1$, а x надо выбрать так, чтобы у было целым, что достигается, если положить $x = p^2 - 1$; $y = 2p + 1$.

В этом случае исходное равенство примет вид:

$$(p^2-1)^2+(2p+1)^2+(p^2-1)(2p+1)=$$
$$=p^4+2p^2(p+1)+(p+1)^2=(p^2+(p+1))^2=$$
$$=(p^2+p+1)^2=\overline{aaa}^2.$$

Подбором легко установить, что требуемое равенство выполняется при $p = 10$:

$$(10^2+10+1)^2=111^2,$$

тогда $x = 10^2 - 1 = 99$, $y = 2 \cdot 10 + 1 = 21$.

При этих значениях исходное равенство запишется в виде:

$$99^2+21^2+99\cdot 21=111^2.$$

Итак, $x = 99$, $y = 21$ — наименьшая пара.

№ 71

Решение. Согласно условию имеем:

$\overline{abc}=11k^2$, или $100a + 10b + c = 11k^2$, где $0 < a, b, c \leq 9$.

Полученное равенство запишем в виде

$$11(9a+b)+(a-b-c)=11k^2. \qquad (1)$$

Чтобы (1) делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы $a - b + c$ делилось на 11, т.е. $a - b + c = 11m$. Так как $0 < a \le 9; 0 \le b \le 9; 0 \le c \le 9$, то $-9 \le 11m \le 18$, откуда $m = 0$, или $m = 1$.

I случай. $m = 0$, тогда получим:

$$\begin{cases} 11(9a+b)+0=11k^2 \\ a-b+c=0 \end{cases}; \begin{cases} 9a+b=k^2 \\ a-b+c=0 \end{cases},$$

или складывая уравнения системы имеем:

$$\begin{cases} 10a+c=k^2,\ a>0, \text{ где } 10 \le 10a+c \le 99, \\ b=a+c \end{cases}$$

или $10 \le k^2 \le 99$, т.е. $k^2 = 16; 25; 36; 49; 64; 81$.

Из этих значений получим трехзначные числа: 176, 275, 396, 891.

II случай. $m = 1$, тогда $11\,(9a + b) + 11 = 11k^2$,

или $\begin{cases} 9a+b+1=k^2 \\ a-b+c=11 \end{cases}; \begin{cases} 10a+c+1=k^2+11 \\ b=a+c-11 \end{cases}; \begin{cases} 10a+c=k^2+10 \\ b=a+c-11 \end{cases};$

$10 \le 10a + c \le 99; 10 \le k^2 + 10 \le 99; 0 < k^2 \le 89$,
т.е. $k^2 = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$.

Из этих значений получим еще два числа: 539, 704.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют всего 6 чисел: 176, 255, 396, 891, 539, 704.

№ 72

Решение.

$3\,(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 =$
$= 3 + 3a^2 + 3a^4 - 1 - a^2 - a^4 - 2a^3 - 2a - 2a^2 =$
$= 2 + 2a^2 + 2a^4 - 2a^3 - 2a - 2a^2 =$
$= (a^2 - a)^2 + (a^2 - 1)^2 + (a - 1)^2 \ge 0.$

Замечание. Неравенство можно доказать иначе:

$1 + a^2 + a^4 = 1 + 2a^2 + a^4 - a^2 = (1 + a)^2 - a^2 =$
$= (1 + a + a^2)(1 - a + a^2).$

Так как $1 + a + a^2 > 0$, то доказательство исходного неравенства сводится к доказательству неравенства $3(1 - a + a^2) \geq$ $\geq 1 + a + a^2$:

$$3(1 - a + a^2) - 1 - a - a^2 = 2(a - 1)^2 \geq 0.$$

№ 73

Решение. Согласно условию задачи, при делении данных чисел на искомое получаются одинаковые остатки, значит, если мы вычтем одно число из другого, то разность разделится на искомое число без остатка

$$\begin{array}{r} 200631 \\ -\underline{200513} \\ 118 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 200749 \\ -\underline{200631} \\ 118 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 200749 \\ -\underline{200513} \\ 236 \end{array}$$

Найдем простые делители полученных чисел:

$$118 = 2 \cdot 59;\ 236 = 2 \cdot 2 \cdot 59.$$

Как видим, единственный общий делитель полученных разностей равен 59, а общий остаток (как нетрудно проверить) — 31.

№ 74

Указание. Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} c + d = 13 \\ 2cd = 156 - 9a, \end{cases}$$

где $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ — искомое число.

Далее доказать, что a — четное число.

Искомые числа 8567 и 8576.

№ 75

Ответ: $\dfrac{56}{9}$.

№ 76

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n, m \in Z$.

№ 77

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

№ 78

Ответ: нет решений.

№ 79

Решение. Так как $x + 2y + 3z = a$, то $z = \frac{a}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y$, и первое уравнение примет вид

$$2\left(x + y + \frac{a}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right) = 4x^2 + y^2,$$

или
$$4x + 2y + 2a = 12x^2 + 3y^2. \qquad (1)$$

Представим (1) в виде $12x^2 - 4x + 3y^2 - 2y - 2a = 0$,

или
$$\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{9} - \frac{2a}{3} = 0.$$

Отсюда видно, что условию задачи удовлетворяет тройка чисел (x, y, z), если $\frac{2}{9} + \frac{2a}{3} = 0$, откуда $a = -\frac{1}{3}$.

№ 80

Ответ: $\arccos 0{,}8$.

№ 81

Решение. **I способ.**

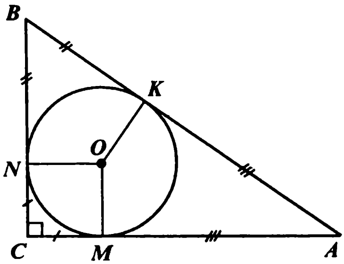


Рис. 86

Пусть в ΔABC ($\angle C = 90°$) $OM = ON = OK = r$ — радиус вписанной окружности.

Так как ΔABC — прямоугольный, то AB — диаметр описанной окружности, тогда $AB = 2R$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r$, где p – полупериметр. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем:

$$AC + BC = 2r + AB,$$

тогда $$S = \frac{1}{2}(2r + 2AB) = (r + AB)r = (r + 2R)r.$$

Итак, $S = (2R + r)$, ч. т. д.

II способ.

Так как ΔABC — прямоугольный, то $AB = 2R$, тогда $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC$. Пусть $AC = x$; $BC = y$, тогда

$$S = \frac{1}{2} xy. \qquad (1)$$

Из ΔABC $$x^2 + y^2 = 4R^2. \qquad (2)$$

Известно, что $r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = \frac{1}{2}(x + y - 2R)$, откуда $x + y = 2(R + r)$.

Из (2) и (3) имеем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4R^2, \\ x + y = 2(R + r). \end{cases}$$

Из I уравнения имеем: $(x + y)^2 - 2xy = 4R^2$ или, учитывая (3), получим $4(R + r)^2 - 2xy = 4R^2$, откуда

$$\frac{1}{2} xy = (R + r) - R^2, \text{ или } S = r(2R + r), \text{ ч. т. д.}$$

№ 82

Ответ: $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{4}$.

№ 83

Указание. Учесть, что $10 \le \sqrt{xyz} \le 31$, тогда $z \le 3$, т.е. $Z = 1; 2; 3$.

Из этих значений условию задачи удовлетворяет лишь значение $z = 1$, тогда, учитывая, что $y \leq 5$, получим, что $xyz \in \{121, 441, 841\}$, откуда подходит лишь число 441, так как $\sqrt{441} = 4 + 4^2 + 1^3$.

Итак, $x = 4$, $y = 4$, $z = 1$.

№ 84

Указание. Преобразовать уравнение к виду $(x - 1)^3 = 7x^3$, откуда $x - 1 = \sqrt[3]{7}x$, т.е. $x = \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{7}}$.

№ 85

Ответ: (3; 1), (1; 3).

№ 86

Решение. Заметим, что $4x^2 + 4x + 3 = (2x + 1)^2 + 2$ и $x^2 - 4x + 6 = (2 - x)^2 + 2$, тогда

$$\sqrt{(2x+1)^2+2}\cdot\mathrm{arctg}(2x+1)-\sqrt{(2-x)^2+2}\cdot\mathrm{arctg}(x-2)=0.$$

Функция $f(t) = \sqrt{t^2+2}\cdot\mathrm{arctg}\,t$ — монотонно возрастающая. Следовательно, последнее равенство означает, что при $t_1 = 2x + 1$ и при $t_2 = x - 2$ значения функции совпадают, что возможно при условии, если $t_1 = t_2$, т.е. $2x + 1 = x - 2$, откуда $x = -3$ — корень исходного уравнения.

№ 87

Ответ: $f(x) = \dfrac{1}{12}(32x - 29)$;

$g(x) = -\dfrac{1}{4}(4x + 15)$.

№ 88

Ответ: 4.

№ 89

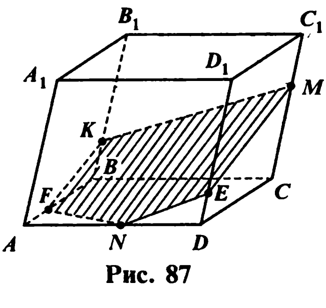


Рис. 87

Ответ: (см. рис. 87).

Пятиугольник $KMENF$ – искомое сечение.

№ 90

Указание. Исходное уравнение записать в виде

$$\left(\frac{50505}{131313}\right)^x+\left(\frac{121212}{131313}\right)^x=1.$$

Далее, исследовать на монотонность функцию

$$f(x)=\left(\frac{50505}{131313}\right)^x+\left(\frac{121212}{131313}\right)^x,$$

откуда находим $x = 2$ — корень уравнения.

№ 91

Решение. Имеем: $\overline{xxyy} = 1100x + 11y$. По условию

$$1100x+11y=(11x)^2+(11y)^2,$$

или
$$99x+(x+y)=11(x^2+y^2).$$

Следовательно $x + y$ кратно 11. Так как $1 \le x \le 9$; $1 \le y \le 9$, то $x + y = 11$, тогда $100x + (11 - x) = 11\,(x^2 + (11 - x)^2)$, значит, $x = 8$, $y = 11 - 8 = 3$.

Проверка $8833 = 88^2 + 33^2$.

№ 92

Ответ: $(0;\ 0)$, $(-4;2)$, $(-2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$, $(-2+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})$.

№ 93

Ответ: нет, не может.

№ 94

Решение. Заметим, что выражение в 1 скобке есть сумма $(n + 1)$ членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1, q = 10$, $b_n = 10^n$, тогда $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}=\frac{1}{9}(10^{n+1}-1)$.

Значит, данное число можно представить в виде:

$$\frac{10^{n+1}-1}{9}(10^{n+1}+35)+36,$$

или
$$\frac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+35)+9\cdot 36}{9}=$$

$$= \frac{10^{2(n+1)} + 34 \cdot 10^{n+1} - 35 + 324}{9} =$$

$$= \frac{10^{2(n+1)} + 34 \cdot 10^{n+1} + 17^2}{9} = \left(\frac{10^{n+1} + 17}{3} \right)^2.$$

Поскольку $10^{n+1} + 17$ кратно 3, то искомое число есть точный квадрат.

№ 95

Указание. Если $\sin x + \cos x = 1$, то $(\sin x + \cos x)^2 = 1$, откуда $\sin x \cos x = 0$. Далее использовать формулу:

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4).$$

№ 96

Решение. Имеет место тождество:

$$x^3 + x^2 + x + 2007 = A(x+7)^3 + B(x+7)^2 + C(x+7) + D,$$

$$x^3 + x^2 + x + 2007 = Ax^3 + (21A + B)x^2 +$$
$$+ (147A + 14B + C)x + (343A + 49B + 7C + D).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 21A + B = 1 \\ 147A + 14B + C = 1 \\ 343A + 49B + 7C + D = 2007 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -20 \\ C = 134 \\ D = 1706 \end{cases}$$

Значит, $x^3 + x^2 + x + 2007 =$
$$= (x+7)^3 - 20(x+7)^2 + 134(x+7) + 1706.$$

№ 97

Решение. Пусть $x^7 = y$, тогда $x^{28} = y^4$, $x^{21} = y^3$.
Получим: $2y + y^4 = 3y^3$, или $y(y^3 - 3y^2 + 2) = 0$,
$y(y-1)(y^2 - 2y - 2) = 0$, откуда $y_1 = 0, y_2 = 1, y_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$.
Тогда $x_1 = 0, x_2 = 1, x_{3,4} = \sqrt[7]{1 \pm \sqrt{3}}$.

№ 98

Ответ: $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

№ 99

Решение. Запишем данное выражение в виде:

$$\frac{x^2+9y^2}{2xy}+\frac{18xy}{x^2+9y^2}=6. \qquad (1)$$

Пусть $\frac{x^2+9y^2}{2xy} = t$, тогда (1) примет вид $t + \frac{9}{t} = 6$ или $(t-3)^2 = 0$, $t = 3$.

Тогда $\frac{x^2+9y^2}{2xy} = 3$, или $(x-3y)^2 = 0$; $x = 3y$.

Следовательно, данное выражение примет вид:

$$(x-7)^2 + 3xy = (x-7)^2 + x^2 = 2x^2 - 14x + 49.$$

Поскольку графиком квадратного трехчлена является парабола, то, наименьшее значение данного выражения достигается в вершине параболы при $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

№ 100

Указание. Доказать, что треугольник прямоугольный, тогда $r = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$.

№ 101

Ответ: $(0;1) \cup (1; \sqrt[10]{10})$.

№ 102

Указание. Запишем данное число в виде:

$$(29^n - 16^n) + (19^n - 6^n) + (15^n - 2^n).$$

Поскольку разность одинаковых степеней делится на разность оснований, то каждое из чисел в скобках делится на 13, а значит, и данное число кратно 13.

№ 103

Решение. Так как $a + b + c = 0$, то и $(a + b + c)^2 = 0$,

или $$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc). \qquad (1)$$

Возведем обе части (1) в квадрат:

$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2)$,
или $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c))$,

Но $a + b + c = 0$, тогда

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \qquad (2)$$

С другой стороны, имеем

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получим:

$4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$,
откуда $2(a^4 + b^4 + c^4) = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$,
или $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

№ 104

Решение. ОДЗ : $x = -\frac{1}{2}$.

Умножим обе части уравнения на 4, а затем вычтем по единице:

$$\frac{4x(4x^2+3)}{(2x+1)^3} - 1 = 27, \text{ или } \frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{(2x+1)^3} = 27;$$

$\frac{(2x-1)^3}{(2x+1)^3} = 27$, откуда $\frac{2x-1}{2x+1} = 3$, тогда $6x + 3 = 2x - 1$,

$4x = -4$, $x = -1$ — корень исходного уравнения.

№ 105

Указание. Умножим обе части II уравнения на 4, а затем вычтем из I уравнения системы полученное:

$$(x - y)^2 = 9(x - y)^3 - 8.$$

Далее заменой $x - y = t$ получаем $9t^3 - t^2 - 8 = 0$, откуда $t = 1$ — единственный корень кубического уравнения.

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} x-1=1, \\ xy=2 \end{cases}$$

откуда находим две пары решений исходной системы: (–1; –2), (2; 1).

№ 106

Указание. Исходное уравнение приводится к виду

$$\frac{(3x+1)^2}{x}=8\cdot\frac{3x+1}{\sqrt{x}}-16;\ x>0.$$

Далее заменой $\frac{(3x+1)^2}{x}=y,\ y>0$ получаем $y^2-8y+16=0$, или $(y-4)^2=0, y=4$, тогда $\frac{3x+1}{\sqrt{x}}=4$, откуда находим $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{9}$, удовлетворяющие данному уравнению.

№ 107

Ответ: $x_1=-10;\ x_2=8$.

№ 108

Ответ: $x_{1,2}=\pm 2$.

№ 109

Ответ: (1; 1), (9; 3).

№ 110

Указание. Использовать формулу $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x$, тогда получим $\sqrt{\mathrm{tg}x-1}=1+\mathrm{tg}^2 x$. Далее доказать, что полученное уравнение (а значит, и исходное) не имеет корней.

№ 111

Решение.

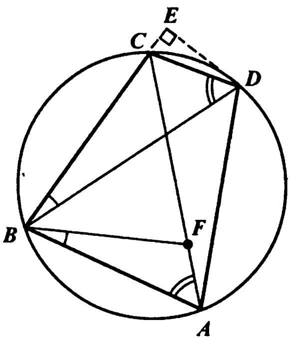


Рис. 88

I способ. Построим $\angle ABF$, равный $\angle CBD$. $\angle BAF = \angle BDC$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC (рис. 88). Следовательно, $\Delta ABF \sim \Delta CBD$, откуда

$AB : AF = BD : CD$,

или $AB \cdot CD = AF \cdot BD$. (1)

$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD =$
$= \angle ABC - \angle ABF = \angle FBC$.

Далее, $\angle BCF = \angle BDA$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB. Значит, $\Delta FBC \sim \Delta ABD$, откуда

$BC : FC = BD : AD$ или $BC \cdot AD = FC \cdot BD$. (2)

Складывая почленно (1) и (2), имеем:

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AF \cdot BD + FC \cdot BD =$
$= BD \cdot (AF + FC) = BD \cdot AC$.

Итак, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$, ч. т. д.

II способ (рис. 88). Пусть $BD = m$; $AC = n$; $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $AD = d$ и $\angle BCD = \alpha$, тогда $\angle BAD = 180° - \alpha$.

Из ΔBCD по теореме косинусов имеем:

$$m^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \qquad (1)$$

Аналогично из ΔBAD получим:

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(180° - \alpha) = a^2 + d^2 + 2ad\cos\alpha.$$

Теперь исключим $\cos\alpha$, для чего умножим обе части (1) на ad, а обе части (2) на bc и сложим почленно:

$$(ad + bc)m^2 = adb^2 + adc^2 + bcd^2 + bca^2 =$$
$$= (ab + cd)(bc + ac),$$

откуда находим $m^2 = \dfrac{(ab + cd)(bd + ac)}{ab + bc}$.

Аналогично для диагонали AC, получим

$$n^2 = \frac{(ad + bc)(bd + ac)}{ab + cd}.$$

Перемножая полученные равенства, имеем $m^2n^2 = (ac+bd)^2$, откуда $mn = ac + bd$.

III способ (см. рис. 89). Решение оказывается более простым, если использовать понятие инверсии. Взяв точку B за полюс, выполним над точками A, D и C произвольную инверсию, степень которой k.

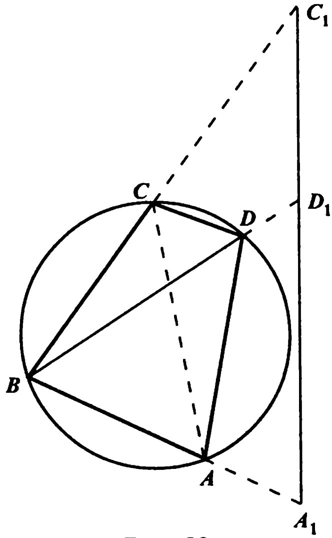


Рис. 89

Данная окружность при этом преобразуется в прямую, на которой будут лежать точки A_1, D_1, C_1, обратные точкам A, D и C.

В равенство $A_1D_1+D_1C_1=A_1C_1$ подставим значения

$$A_1D_1 = \frac{k\cdot AD}{BA\cdot BD};\quad D_1C_1 = \frac{k\cdot DC}{BD\cdot BC};\quad A_1C_1 = \frac{k\cdot AC}{BA\cdot BC}.$$

Так как $A_1D_1 + D_1C_1 = A_1C_1$, то получим

$$\frac{k\cdot AD}{BA\cdot BD}+\frac{k\cdot DC}{BD\cdot BC}+\frac{k\cdot AC}{BA\cdot BC},$$

откуда после преобразований получим

$$AD\cdot BC + DC\cdot BA = AC\cdot BD.$$

№ 112

Указание. Показать, что выражение

$$\frac{(2p+2)(2p+1)\cdot 2p}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{2p(2p+1)(p+1)}{3}$$ — число целое.

Но по условию задачи p и $2p + 1$ – числа простые, значит, $p + 1$ делится на 3, а поэтому $4p + 1 = 3p + (p + 1)$ – число составное.

№ 113

Указание. Заметим, что
$$\frac{x^2-3x+4}{49}=\left(\frac{x+2}{7}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{7x}{49}}\right)^2;$$
$x+2$ может делиться на 7 только в том случае, когда x не делится на 7, а $7x$ может делиться на 49 только в том случае, если x делится на 7. Аналогично доказывается в остальных случаях.

№ 114

Ответ: $7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

№ 115

Ответ: $(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

№ 116

Ответ: $\frac{97}{6}\sqrt[3]{18}$.

№ 117

Ответ: $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{72}+4)$.

№ 118

Указание. Записать уравнение в виде $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-\sqrt[3]{z}$. Далее возвести обе части в куб по формуле
$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$$
и воспользоваться записанным ранее соотношением. Тогда получим $(x+y+z)^3=27xyz$.

№ 119

Указание. $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1+2+\ldots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}$ и т.д.

№ 120

Указание. Раскрыть скобки и сгруппировать члены. Тогда получим $S_n=\frac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)x^{2n}}+(2n-1)$.

№ 121

Решение. $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Если n не делится на 5, то число имеет вид $5k \pm 1$, $5k \pm 2$, тогда $n^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ и $n^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, т.е. $n^2 - 1$ кратно 5 или $n^2 + 1$ кратно 5. Значит, либо $n^2 - 1$, либо $n^2 + 1$ делится на 5.

№ 122

Решение. Неполное частное

$$x = \frac{7 \cdot 19a \cdot 29 - 39}{41} = 94a - 1 + \frac{3a+2}{41}.$$

Наименьшее натуральное a, при котором $\frac{3a+2}{41}$ — целое число, $a = 13$. При этом $x = 1222$. Значит, искомое число будет равно: $(1222 \cdot 41 + 39) : 29 = 1729$.

№ 123

Решение. Вычитая $\frac{1}{2}(17 - 13) = 2$ из каждого члена ряда, получим: $-15 + 15 - 15 + 15 - 15 + 15 - \ldots$

Следовательно, n-й член данного ряда равен $2 + 15(-1)^n$.

№ 124

Указание. Пусть $a = \operatorname{tg} A$, $b = \operatorname{tg} B$, $c = \operatorname{ctg} C$, тогда по формуле тангенса разности получим: $\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = 0$, или $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, откуда и следует, что исходный треугольник равнобедренный.

Замечание. Можно было воспользоваться соотношением: $A + B + C = \pi$.

№ 125

Указание. Привести уравнение к виду

$$\left(\frac{x^2 + x}{x+1}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x^2 + x}{x-1} = 4.$$

Далее замена $\frac{x^2+x}{x+1}=y$, $y^2-3y-4=0$, откуда $y_1=-1$, $y_2=4$ и $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$.

№ 126

Решение. Умножим обе части данного равенства на $x\sqrt{x}-\sqrt{x^3-1}$, тогда, после упрощений получим

$$y\sqrt{y}+\sqrt{y^3-1}=x\sqrt{x}-\sqrt{x^3-1}. \quad (1)$$

Аналогично, умножая обе части на $y\sqrt{y}-\sqrt{y^3-1}$, получим

$$x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-1}=y\sqrt{y}-\sqrt{y^3-1}. \quad (2)$$

Складывая почленно (1) и (2), имеем:

$$2\left(\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y^3-1}\right)=0,$$

откуда $\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y^3-1}=0$, ч. т. д.

№ 127

Решение. Заметим, что

$$\operatorname{tg}25°\cdot\operatorname{tg}35°=\operatorname{tg}(30°-5°)\cdot\operatorname{tg}(30°+5°)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}30°-\operatorname{tg}5°}{1+\operatorname{tg}30°\operatorname{tg}5°}\cdot\frac{\operatorname{tg}30°+\operatorname{tg}5°}{1-\operatorname{tg}30°\operatorname{tg}5°}=\frac{\operatorname{tg}^2 30°-\operatorname{tg}^2 5°}{1-\operatorname{tg}^2 30°\operatorname{tg}^2 5°}=$$

$$=\frac{1-3\operatorname{tg}^2 5°}{3-\operatorname{tg}^2 5°}.$$

Кроме того, $\operatorname{tg}15°=\frac{\sin 15°}{\cos 15°}=\frac{\sin(3\cdot 5°)}{\cos(3\cdot 5°)}$.

Но $\sin(3\cdot 5°)=\sin 5°\cdot(3-4\sin^2 5°)$

и $\cos(3\cdot 5°)=\cos 5°\cdot(4\cos^2 5°-3)$,

тогда $\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}5°\cdot\frac{4\cos^2 5°-1}{4\cos^2 5°-3}=$

$$=\operatorname{tg}5^\circ\cdot\frac{4\cdot\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 5^\circ}-1}{4\cdot\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 5^\circ}-3}=\operatorname{tg}5^\circ\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}15^\circ\cdot\operatorname{tg}25^\circ\cdot\operatorname{tg}35^\circ\cdot\operatorname{tg}85^\circ=$$

$$=\operatorname{tg}5^\circ\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}\cdot\frac{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ}\cdot\operatorname{tg}85^\circ=$$

$$=\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}85^\circ=\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{ctg}5^\circ=1,$$ ч. т. д.

№ 128

Решение. Пятизначные числа, оканчивающиеся цифрой 6, делятся на 3 в том и только в том случае, если четырехзначное число, полученное при отбрасывании последней цифры, делится на 3. Четырехзначных чисел будет всего $9999 - 999 = 9000$.

Заметим, что каждое третье из них делится на 3. Значит, существует 3000 четырехзначных чисел, кратных 3, и ровно столько же пятизначных чисел, которые оканчиваются на 6 и делятся на 3.

№ 129

Решение. При делении на 3 квадрат целого числа дает остаток 0, если число делится на 3, и остаток 1, если число не делится на 3. Если бы ни a, ни b не делились на 3, то остаток от деления числа $a^2 + b^2$ на 3 был бы равен 2, что в силу приведенного выше замечания невозможно, так как сумма $a^2 + b^2$ равна по условию c^2. Следовательно, по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3.

№ 130

Решение. Заметим, что $x = \dfrac{1}{3}$ — корень уравнения. Докажем, что других корней исходное уравнение не имеет.

При $x > -\frac{1}{3}$ функции $y_1(x) = 8^x$ и $y_2(x) = 3x + 1$ принимают положительные значения и возрастают, значит, левая часть уравнения также является возрастающей функцией. Тогда на промежутке $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ уравнение не может иметь более одного корня. Далее, при $x \le -\frac{1}{3}$ имеем $y_1(x) > 0$; $y_2(x) \le 0$, значит $y_1(x) \cdot y_2(x) \le 0$, т.е. на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ уравнение не имеет корней.

Итак, $x = \frac{1}{3}$ — единственный корень уравнения.

11 класс

№ 1

Решение. Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тогда данное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{x+2003}-\frac{1}{x+2004}+\frac{1}{x+2004}-\frac{1}{x+2005}+\frac{1}{x+2005}-$$
$$-\frac{1}{x+2006}+\frac{1}{x+2006}-\frac{1}{x+2007}=\frac{1}{999999};$$
$$\frac{1}{x+2003}-\frac{1}{x+2007}=\frac{1}{999999},$$

или $\frac{4}{(x+2003)(x+2007)}=\frac{1}{999999}$.

Пусть $x + 2005 = y$, тогда получим

$\frac{4}{(y+2)(y-2)}=\frac{1}{999999}$, $y^2 = 4(999999 + 1)$, $y^2 = 4 \cdot 10^6$,

и так как $y = x + 2005$, то $(x + 2005)^2 = 4 \cdot 10^6$, откуда $x + 2005 = \pm 2000$.

Значит, $x_1 = 2000 - 2005 = -5$; $x_2 = -4005$.

№ 2

Решение. Пусть $\log_7 \pi = \alpha$, откуда

$$\pi = 7^{\alpha}. \qquad (1)$$

Аналогично $\log_5 \pi = \beta$, откуда

$$\pi = 5^{\beta}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow \pi^{1/\alpha} = 7$; $\pi^{1/\beta} = 5$, или $\pi^{1/\alpha} \cdot \pi^{1/\beta} = 35$, или $\pi^{1/\alpha+1/\beta} = 35$. Но $\pi^3 \approx 3{,}14^3 \approx 30{,}96 < 35$, т.е. $35 > \pi^3$, тогда $\pi^{1/\alpha+1/\beta} = 35 > \pi^3$, или $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>3$.

Так как $\alpha = \log_7 \pi$ и $\beta = \log_5 \pi$, то получим

$$\frac{1}{\log_7 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>3.$$

№ 3

Ответ: $\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}}$, при $a < 3b$.

№ 4

Решение. Запишем данное выражение в виде

$$7^{n+2}+8^{2n+1}=(7^{n+2}+7^n\cdot 8)+(8^{2n+1}-7^n\cdot 8)=$$
$$=7^n(7^2+8)+8((8^2)^n-7^n)=57\cdot 7^n+8(64^n-7^n).$$

Поскольку $64^n - 7^n$ кратно разности $64 - 7=57$, то и данное выражение кратно 57.

№ 5

Решение. Простое число может иметь следующий вид: $p = 3, p = 3k + 1, p = 3k + 2$.

Если $p = 3$, то $p + 10=13$ и $p + 14 = 17$ удовлетворяют условию задачи.

Если $p = 3k + 1$, то $p + 10 = 3k + 11, p + 14 = 3k + 15$ — число составное.

Если $p = 3k + 2$, $p + 10 = 3k + 12$ — число составное, значит $p = 3$.

№ 6

Решение.

Поскольку $2x^2+2y^2=(x^2-xy+y^2)+(x^2+xy+y^2)$, то сумма седьмых степеней делится на сумму первых степеней.

№ 7

Решение.

Пусть $x=\dfrac{\pi}{2}-y$, тогда $\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\right)=\cos y$

и $\sin 13x=\sin\left(13\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)\right)=\sin\left(6\pi+\dfrac{\pi}{2}-13y\right)=$

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-13y\right)=\cos 13y=f(\cos y)=f(\sin x).$

Заметим, что число 13 можно заменить любым целым числом вида $4n + 1$.

№ 8

Решение. Если a, b, c — стороны треугольника, то $a + b > c$ (по неравенству треугольника) и т.д. Следовательно, $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3 > a+b > c = (\sqrt[3]{c})^3$, откуда $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} > \sqrt[3]{c}$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи проверки неравенства треугольника. Значит, отрезки с длинами $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{c}$ также образуют треугольник.

№ 9

Ответ: Например, $(2005^{1003} \cdot 39;\ 2005^{1003} \cdot 22)$; $(2005^{1003} \cdot 41;\ 2005^{1003} \cdot 18)$.

№ 10

Указание. Записать уравнение в виде

$$(3^x)^3 - (2^x)^3 = 3 \cdot (2^x \cdot (3^x)^2 - 3^x \cdot (2^x)^2).$$

Далее заменой $2^x = a$, $3^x = b$, где $a > 0$, $b > 0$ получим $(a-b)^3 = 0$, $a = b$ и $x = 0$ — единственный корень исходного уравнения.

№ 11

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1$.

№ 12

Решение. $(1{,}001)^{1000} = \left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^{1000} > 2 \Rightarrow (1{,}001)^{1000} > 2$.

Замечание. Здесь мы использовали тот факт, что

$$2 \le \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < 3.$$

№ 13

Решение. Чтобы доказать требуемое, достаточно показать, что данное выражение делится одновременно на 7 и на 9.

Рассмотрим 2 случая:

1) $n = 2k$ — четное, тогда $10^n - 3^n$ при $n \in N$ всегда кратно $10 - 3 = 7$; с другой стороны $6^n - 1^n = 6^{2k} - 1^{2k}$ кратно $6^2 - 1^2 = (6-1)(6+1) = 5 \cdot 7$. Значит, при $n = 2k$ $6^n - 1$ делится на 7.

Итак, данное выражение при $n = 2k$ делится на 7.

С другой стороны, число $10^n - 1$ при всех $n \in N$ делится на $10 - 1 = 9$, а число $6^n - 3^n = 6^{2k} - 3^{2k}$ делится на $6^2 - 3^2 = (6+3)(6-3) = 9 \cdot 3$, т.е. так же делится на 9, а потому и данное число делится на 9.

Таким образом вышло, что при всех $n = 2k$, $n \in N$, данное выражение делится на $7 \cdot 9 = 63$.

2) $n = 2k + 1$ — нечетное число, тогда $10^n - 3^n$ также делится на $10 - 3 = 7$.

Так как $6^{2k} - 1$делится на 7, то 6^{2k} при делении на 7 дает остаток 1, т.е. число $6^{2k+1} = 6^{2k} \cdot 6$ при делении на 7 дает остаток $1 \cdot 6 = 6$. Следовательно, число $6^n - 1 = 6^{2k+1} - 1$ на 7 не делится.

Таким образом, при $n = 2k + 1$, данное выражение не делится на 7, а тем более, на 63, а делится лишь при четных n.

№ 14

Решение. Так как $|\sin x| \le 1$, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin^7 x = 1, \\ -\sin 7x = 1. \end{cases}$$

Из I уравнения имеем $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. Полученное решение удовлетворяет II и III уравнениям системы, так как $\sin^7 x = (\sin x)^7 = \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right)^7 = \cos^7 2\pi n = 1$, $n \in Z$;

$$-\sin 7x = -\sin\left(\frac{7\pi}{2} + 14\pi n\right) = \cos 14\pi n = 1.$$

Итак, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

№ 15

Решение. Запишем уравнение в виде $x - 13 = (13 + x^2)^2$, откуда

$$\sqrt{x-13} = 13 + x^2. \qquad (1)$$

Пусть $f(x) = 13 + x^2$, тогда $x = \sqrt{f-13}$, т.е. $g(x) = \sqrt{x-13}$, или $g(x) = f(x)$, тогда $f(x) = x$, т.е. $13 + x^2 = x$, или $x^2 - x + 13 = 0$.

Полученное уравнение, а значит, и исходное, корней (действительных) не имеет, так как $D < 0$.

Замечание. Уравнение $x - 13 = (13 + x^2)^2$ можно решить иначе. Так как $13 + x^2 > 0$ при всех $x \in R$, то $x - 13 > 0$, т.е. $x > 13$. Но при $x > 13$, $(13 + x^2)^2 > x - 13$, так что равенство $x - 13 = (13 + x^2)$ не может выполняться ни при каких x, т.е. исходное уравнение не имеет корней.

№ 16

Решение. $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Тогда $y = 1 \cdot \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4} =$
$= x + 2$ или $y = x + 2$.

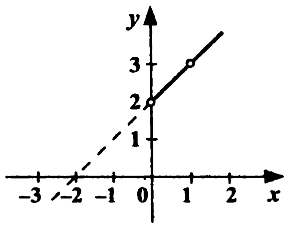


Рис. 90

Учитывая ограничения строим график функции.

№ 17

Указание. $x - 2 + 2\sqrt{x-3} = (x-3) + 2\sqrt{x-3} + 1$.

После преобразований получим уравнение $\sin x = 1$,

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $x \geq 3$, тогда $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \geq 3$, откуда $n \geq \frac{1}{4}(6-\pi)$, т.е. $n = 2, 3, 4\ldots$

Значит, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \geq 2$.

№ 18

Ответ: $[-2\sqrt{2}; 0) \cup (0; 2\sqrt{2}]$.

№ 19

Решение. Заменяя x на $\frac{1}{x}$, получим $5f\left(\frac{1}{x}\right) = 3f(x) + \sqrt{x}$, где $x > 0$.

Решая полученное уравнение с данным, имеем систему относительно $f(x)$ и $f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\begin{cases} 5f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ 3f(x) - 5f\left(\frac{1}{x}\right) = -\sqrt{x}. \end{cases}$$

Поскольку нам надо найти $f(x)$, то умножим обе части первого уравнения на 5, а второго на (–3), а затем почленно сложим:

$$16f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x},\ x > 0,$$

откуда $f(x) = \frac{5+3x}{16\sqrt{x}}$.

№ 20

Решение. $7\sin\beta = 6\sin\beta + \sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$,

или $\quad 6\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta = 2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta). \quad (1)$

С другой стороны $7\sin\beta = 8\sin\beta - \sin\beta$,

или $\quad 8\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta) + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha. \quad (2)$

Разделив обе части (2) на (1), получим:

$$\frac{8\sin\beta}{6\sin\beta}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}, \text{ или } \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3},$$

откуда $3\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4\operatorname{tg}\alpha$.

№ 21

Решение. Рассмотрим функцию $y=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$. Заметим, что при $x>0$ функция возрастает, так как при $x>0$

$$y'=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1+x-1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0, \text{ а при } x=0,\ y'=0.$$

Значит, при $x>0$ выполняется неравенство

$$\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0.$$

Полагая $x=\frac{1}{2006}$, получаем $\ln\frac{2007}{2006}-\frac{1/2006}{2007/2006}>0$, или $\ln\frac{2007}{2006}>\frac{1}{2007}$, т.е. I число меньше II.

№ 22

Ответ: $\dfrac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

№ 23

Решение. Согласно условию, искомое число имеет вид $2abcde$, тогда имеем:

$$\overline{abcde2}=3\cdot\overline{2abcde}, \text{ или } \overline{abcde}\cdot 10+2=3\cdot(2\cdot 10^5+\overline{abcde}).$$

Пусть $\overline{abcde}=X$ — пятизначное число, тогда $10X+2=3\cdot(2\cdot 10^5+x)$, или $7X=6\cdot 10^5-2$, $X=85714$, тогда исходное число будет равно $\overline{2abcde}=\overline{2X}=285714$.

№ 24

Ответ: нет решений.

№ 25

Решение. Данное выражение приведем к основанию 2:

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 6}\cdot\frac{\log_2 6}{\log_2 7}\cdot\frac{\log_2 7}{\log_2 8}=\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 8}=\frac{1}{3}.$$

Замечание. Известно, что $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$. (1)

Если поставить в соответствие логарифму $\log_a b$ дробь $\frac{b}{a}$ и то же сделать для других логарифмов, то равенству (1) можно поставить в соответствие равенство $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, которое означает обычное сокращение на a. Рассматривая наш пример, имеем после сокращений дробь $\frac{2}{8}$, которой соответствует $\log_2 8=\frac{1}{3}$. (См.: *Шарыгин И.* Математика для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1997. С. 139–140.)

№ 26

Решение. $5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500.$

Из условия следует, что $x\in N$, тогда $5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$ или $5^x\cdot 8^{1-\frac{1}{x}}=500$, $5^x\cdot 8\cdot 8^{-\frac{1}{x}}=500$; $2\cdot 5^x=125\cdot 8^{\frac{1}{x}}$.

Прологарифмируем обе части полученного уравнения по основанию 5 (или 8):

$$\log_5(2\cdot 5^x)=\log_5\left(125\cdot 8^{\frac{1}{x}}\right),\text{ или }\log_5 2+x=3+\frac{3}{x}\log_5 2;$$

$x^2+x\log_5 2=3x+3\log_5 2$; $x(x-3)+(x-3)\log_5 2=0$,

$(x-3)(x+\log_5 2)=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=-\log_5 2$.

Так как $x\in N$, то x_2 — не подходит. Итак, $x=3$ — единственный корень исходного уравнения.

№ 27

Указание. Учесть, что $\sin 54° = \cos 36°$ и

$$\sin 54° = \sin(3\cdot 18°) = 3\sin 18° - 4\sin 18°,$$
$$\cos 36° = \cos(2\cdot 18°) = 1 - 2\sin^2 18°,$$

тогда получим уравнение $4\sin^3 18° - 2\sin^2 18° - 3\sin 18° + 1 = 0$, которое заменой $\sin 18° = x$, где $x > 0$; $x \neq 1$ приводится к виду $(x-1)(4x^2+2x-1) = 0$.

Далее находим $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, $\cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

№ 28

Решение. Пусть $t = 0{,}5(\cos x - \sin x)$,

или $t = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Итак, $E(t) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Заметим, функция $y = \frac{10}{\pi}\arccos t$ — убывающая и непрерывна, тогда

$$E(y) = \left[\frac{10}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{10}{\pi}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \left[\frac{5}{2}; \frac{15}{2}\right].$$

Итак, $E(y) = [2{,}5; 7{,}5]$.

№ 29

Решение. Проведем апофему MK на грань MDC. Пусть $OK = x$, где $x > 0$ — необходимое условие, $OM = y$ — высота пирамиды, тогда $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot MO = \frac{4}{3}x^2 y$.

По условию задачи $V_{пир}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, тогда $\frac{4}{3}x^2y=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, откуда $y=\frac{\sqrt{2}}{x^2}$. $S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot P_{осн}\cdot h$, где $P_{осн}=8x$, $h=\sqrt{x^2+y^2}$, тогда $S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot 8x\sqrt{x^2+y^2}=4x\sqrt{x^2+y^2}$. Так как $y=\frac{\sqrt{2}}{x^2}$, то $S_{бок}=S(x)=4x\sqrt{x^2+\frac{2}{x^4}}$, или $S(x)=4\sqrt{x^4+\frac{2}{x^2}}$.

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)=x^4+\frac{2}{x^2}$ при $x>0$.

Найдем производную $f'(x)=\frac{4}{x^3}(x^6-1)$; $f'(x)=0$ при $x=1$. Заметим, что при $0<x<1$ $f'(x)<0$; при $x>1$ $f'(x)>0$.

Значит, функция f, непрерывная в точке 1 убывает при $0<x\le 1$ и возрастает при $x\ge 1$. Следовательно, функция f и $S_{бок}=4\sqrt{f(x)}$ при $x=1$ будут иметь наименьшие значения. При $x=1$, $S_{бок}=4\sqrt{3}$.

№ 30

Ответ: 0.

№ 31

Указание. Если x — искомое число, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+307=m^2 \\ x-192=n^2 \end{cases}, \text{ откуда } m^2-n^2=499.$$

Далее учесть, что 499 — простое число.

Решая систему $\begin{cases} m+n=499 \\ m-n=1 \end{cases}$, находим $m=250$, $n=249$ и $x=62193$.

№ 32

Ответ: решений нет.

№ 33

Решение. Поскольку $\sqrt{3x^2+4}>0$ при любом $x\in R$, то из данного неравенства имеем $x-1>0$, т.е. $x>1$.

Запишем данное неравенство в виде $\sqrt{3x^2+4}\geq 4(x-1)$, и так как обе части неравенства положительны, то, возведя в квадрат, получим равносильное неравенство:

$$3x^2+4\geq 16x^2-32x+16\text{, или } 13x^2-32x+12\leq 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, получим $\frac{6}{13}\leq x\leq 2$. Учитывая, что $x>1$, имеем $1<x\leq 2$, тогда $x=2$ — целое решение неравенства.

№ 34

Решение.

$\log_3 18=\log_3(2\cdot 3^2)=\log_3 2+\log_3 3^2=\log_3 2+2.$

Остается вычислить $\log_3 2$, если $\log_3 12=a$.

Заметим, что $\log_3 12=\log_3(4\cdot 3)=2\log_3 2+1=a$, откуда $\log_3 2=\frac{1}{2}(a-1)$, тогда $\log_3 18=\frac{1}{2}(a-1)+2=\frac{a+3}{2}$.

№ 35

Ответ: $x_{1,2}=\pm 2$.

№ 36

Решение. Заметим, что $x>0$. (1)

Кроме того, учитывая область определения логарифмической функции, имеем $x^2-1>0$, $x^2>1$, $|x|>1$, откуда

$$x>1,\ x<-1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$, что $x>1$ (при этом на основание логарифма автоматически выполняется ограничение $x\neq 1$).

Запишем исходное уравнение в виде $x^{\log_x \sqrt{x^2-1}} = 5$, или, используя основное логарифмическое тождество, имеем $\sqrt{x^2-1} = 5$; $x^2 - 1 = 25$, $x^2 = 26$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{26}$.

Так как $x > 0$, то $x = \sqrt{26}$ — корень данного уравнения.

№ 37

Ответ: $7744 = 88^2$.

№ 38

Решение. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{ab} = 10a + b$,

$2\overline{bc} = 2(10b + c) = 20b + 2c$; $\overline{3ac} = 30a + 3c$.

Тогда $100a + 10b + c = (10a + b) + (20b + 2c) + (30a + 3c)$, или $60a - 11b = 4c$, откуда $c = 15a - 3b + \frac{b}{4}$.

Так как $0 < b \le 9$, то, учитывая, что b кратно 4, имеем $b = 4$, $b = 8$.

1) Если $b = 4$, то $c = 15a - 11 \Rightarrow$
   $a = 1$, $c = 4$ и $\overline{abc} = 144 = 12^2$.
2) Если $b = 8$, то $c = 15a - 22 \Rightarrow$
   $a = 2$, $c = 8$, тогда $\overline{abc} = 288$ — не подходит.

Итак, условию задачи удовлетворяет единственное число 144.

№ 39

Решение.

Так как $\cos\alpha + \cos\beta = a$, то $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = a$. Аналогично $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = b$.

Разделив обе части II равенства на I, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Известно, что $\mathrm{tg}x=\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$, тогда $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$,

и, учитывая (1), имеем: $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\cdot\dfrac{b}{a}}{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$.

№ 40

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

№ 41

Решение. $xy+yz+xz=(x+z)y+zx=$

$=(\mathrm{tg}10°+\mathrm{tg}55°)\mathrm{tg}25°+\mathrm{tg}55°\cdot\mathrm{tg}10°=$

$$=\frac{\sin(10°+55°)}{\cos10°\cos55°}\cdot\frac{\sin25°}{\cos25°}+\frac{\sin55°\cdot\sin10°}{\cos55°\cdot\cos10°}=$$

$$=\frac{\sin65°\sin25°}{\cos10°\cdot\cos55°\cdot\cos25°}+\frac{\sin55°\sin10°}{\cos10°\cdot\cos55°}=$$

$$=\frac{\sin25°}{\cos10°\cdot\cos55°}+\frac{\sin55°\sin10°}{\cos10°\cdot\cos55°}=$$

$$=\frac{\sin25°\sin55°\sin10°}{\cos10°\cdot\cos55°}=\frac{\sin25°+\dfrac{1}{2}(\cos45°-\cos65°)}{\dfrac{1}{2}(\cos45°+\cos65°)}=$$

$$=\frac{\sin25°+\cos45°}{\cos45°+\sin25°}=1.$$

№ 42

Решение. Пусть $\sin2x+\cos2x=t$, тогда $t^2=1+\sin4x$, и данное уравнение примет вид $2t+t^2=0$, или $t(t+2)=0$, откуда $t_1=0$, $t_2=-2$, так что данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

1) $\sin 2x + \cos 2x = 0$ — однородное уравнение I степени.

$\operatorname{tg} 2x + 1 = 0,\ 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$

2) $\sin 2x + \cos 2x = -2$ — нет корней, так как

$$|\sin\alpha + \cos\beta| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}, \text{ так что } |t| \le \sqrt{2}.$$

Итак, $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

№ 43

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arcctg} 5 + \pi n;\ \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcctg} 5 - \pi n\right),\ n \in Z.$

№ 44

Указание. Нахождение $D(y)$ сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \lg \sin x > 0, \end{cases}$$

откуда находим: $D(y) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

№ 45

Решение. Область определения данной функции сводится к решению смешанной системы:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \arcsin(x-5) \ne 0, \\ -1 \le x - 5 \le 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 0, \\ x \ne 5, \\ 4 \le x \le 6. \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} x \ne 5, \\ 4 \le x \le 6. \end{cases}$

Целые значения x будут 4 и 6, а их сумма равна 10.

№ 46

Решение.

Пусть $y = a$, тогда $\sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{3^a}$, или $\frac{9-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{3^{2a}}$, откуда находим $x^2 = \frac{3^{2a+2}-1}{1+3^{2a}}$. Так как $9 - x^2 > 0$, то $x^2 < 9$, значит $0 \le \frac{3^{2a+2}-1}{1+3^{2a}} < 9$, откуда $\begin{cases} 3^{2a+2}-1 \ge 0, \\ \frac{3^{2a+2}-1}{1+3^{2a}} < 9 \end{cases}$.

Из первого неравенства имеем $3^{2a+2} \ge 3^0$, откуда $a \ge -1$. Из II неравенства имеем $3^{2a+2} - 1 < 9 + 3^{2a+2}$, $9 > -1$ — верно при любом a. Следовательно, $a \ge -1$, т.е. $E(y) = [-1; +\infty)$.

№ 47

Решение. Здесь при $x = 4$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль, значит, применить теорему о пределе частного нельзя. Упростим дробь, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \lim_{x\to4}\frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}+3} = \frac{4+4}{3+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

№ 48

Ответ: (0; –2), (–2; 6).

№ 49

Решение. Для того, чтобы прямая $y = ax - 5$ касалась кривой $y = 3x^2 - 4x - 2$ в точке с абсциссой x_0, необходимо и достаточно, чтобы значения обеих функций при $x = x_0$

совпадали и значение a (угловой коэффициент прямой) было равно значению производной функции $y = 3x^2 - 4x - 2$ при $x = x_0$.

$y' = (3x^2 - 4x - 2)' = 6x - 4$, значит, искомые значения a должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} ax_0 - 5 = 3x^2 - 4x - 2, \\ a = 6x_0 - 4 \end{cases}$$

откуда находим: $x_0 = -1$, $a = -10$ и $x_0 = 1$, $a = 2$..

№ 50

Ответ: $y_{наим} = -\frac{\pi}{2}$, $y_{наиб} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

№ 51

Указание. $\int\limits_4^5 \frac{x^2 - 6x + 10}{x - 3} dx = \int\limits_4^5 \left((x-3) + \frac{1}{x-3} \right) dx =$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Bigg|_4^5 + \ln|x - 3| \Bigg|_4^5 = 1{,}5 + \ln 2.$$

№ 52

Ответ: $6\frac{1}{6}$.

№ 53

Указание. $q = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ при любом $x \in R$, тогда достаточно решить неравенство $q < 1$, или $x(x + 1) < 0$, откуда находим $x \in (-1; 0)$.

№ 54

Решение.

I способ (см. рис. 91). Используя теорему косинусов для ΔAMC, ΔBCN, ΔACB, имеем:

$$AM^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab\cos\angle C, \quad (1)$$

$$BN^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab\cos\angle C, \quad (2)$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C. \quad (3)$$

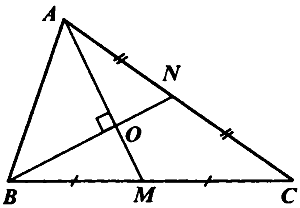


Рис. 91

Так как по условию задачи $AM \perp BN$, то из ΔBOA имеем

$$AB^2 = AO^2 + BO^2. \quad (4)$$

По свойству медианы треугольника $BO = \frac{2}{3}BN$; $AO = \frac{2}{3}AM$, тогда (4) примет вид:

$$AB^2 = \frac{4}{9}(AM^2 + BN^2), \quad (5)$$

Упростим (5) с учетом (1) и (2):

$$AB^2 = \frac{1}{9}(5a^2 + 5b - 8ab\cos\angle C). \quad (6)$$

Сравнивая (3) и (6), получим $4(a^2 + b^2) = 10ab\cos\angle C$, откуда $\cos\angle C = \frac{2(a^2 + b^2)}{5ab}$, тогда (3) примет вид:

$$AB^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2),$$

откуда $AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}$.

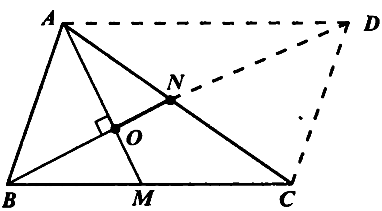


Рис. 92

II способ (см. рис. 92).

Пусть $BO = 2n$, $ON = n$, $AO = 2m$, $OM = m$. Дополним ΔABC до параллелограмма $ABCD$, тогда, по свойству последнего, имеем:

$$2(AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2,$$

или $$2(x^2 + b^2) = 36n^2 + a^2, \quad (1)$$

Из ΔAOB и ΔAON имеем

$x^2 = 4m^2 + 4n^2$, $4m^2 + n^2 = \frac{1}{4}n^2$, откуда $x^2 - \frac{1}{4}a^2 = 3n^2$,

значит,
$$n^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{4}a^2\right). \qquad (2)$$

Учитывая (2), равенство (1) примет вид

$$2(x^2 + b^2) = 12\left(x^2 - \frac{1}{4}a^2\right) + a^2,$$

откуда находим $x = AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}$.

№ 55

Решение. Пусть $AB = x$, тогда $AD = x\sqrt{2}$. Выразим через x все стороны ΔAMK и применим теорему косинусов для стороны AK. Это позволит вычислить косинус искомого угла AMK. Пусть $\angle AMK = \alpha$. Заметим, что AO и BK — медианы ΔABD.

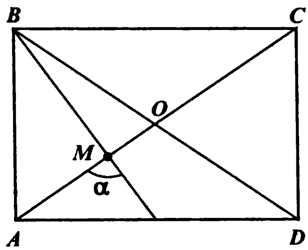


Рис. 93

Значит, $MK = \frac{1}{3}BK$, $AM = \frac{2}{3}AO$, тогда

$$MK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$AM = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{AD^2 + CD^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2x^2 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

В ΔAMK $AK = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $AM = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $MK = \frac{x}{\sqrt{6}}$, тогда, по теореме косинусов имеем:

$$AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2AM \cdot MK \cos\alpha,$$

или $\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}x^2\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha=0$, значит, $\angle AMK=\alpha=90°$.

№ 56

Указание. Записать уравнение в виде:

$$x=y^4+y^3+2y^2+2y+2-\frac{5}{y-1}.$$

Далее учесть, что $x, y\in N$, тогда $y-1=\pm 5$, откуда находим единственную пару чисел (1597; 6), удовлетворяющую исходному уравнению.

№ 57

Решение. Из данного уравнения выразим переменную x через y:

$$x=\frac{2005y+2007}{2006}. \qquad (1)$$

Выделим целую часть в правой части (1): $x=y+1+\dfrac{1-y}{2006}$.

Так как $x\in N$, то $\dfrac{1-y}{2006}$ — целое число. Пусть $\dfrac{1-y}{2006}=y_1$, $y_1\in N$, тогда $y=1-2006y_1$ и $x=2-2005\,y_1$.

Нетрудно видеть, что при $y_1=0, x=2, y=1$. Таким образом, пара чисел (2; 1) является наименьшей, удовлетворяющей условию задачи.

№ 58

Ответ: $(\pm1;\pm3),(\pm3;\pm1)$.

№ 59

Решение. Легко проверить, что $x=11$ — корень уравнения. Других корней уравнение иметь не может, так как левая часть уравнения — возрастающая функция, а правая часть уравнения — функция, убывающая на области определения уравнения ($3<x<14$).

№ 60

Решение. Запишем уравнение в виде $8\sin^3 x - 7 = \sqrt[3]{\frac{f+7}{8}}$,

т.е. $g = \sqrt[3]{\frac{\sin x + 7}{8}}$.

Имеем уравнение вида $f(x) = g(x)$, значит $f(x) = x$,

или $8\sin^3 x - 7 = \sin x$; $8\sin^3 x - \sin x - 7 = 0$,

или $(\sin x - 1)(8\sin^2 x + 8\sin x + 7) = 0$,

откуда $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Уравнение $8\sin^2 x + 8\sin x + 7 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

№ 61

Указание. После упрощений получим $y = 1$; $x > 2$ (см. рис. 94).

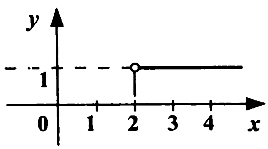


Рис. 94

№ 62

Решение.

$$D: \begin{cases} x > 0, \\ \mathrm{ctg} x > 0, \\ \mathrm{tg}(\pi + x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_3 |x| + 9^{\log_9 2} = \log_{2007} \mathrm{ctg} x + \log_{2007} \mathrm{tg} x;$$

$$\log_3 |x| + 2 = \log_{2007}(\mathrm{ctg} x \cdot \mathrm{tg} x);\quad \log_3 |x| + 2 = \log_{2007} 1;$$

$$\log_3 |x| + 2 = 0;\quad \log_3 |x| = -2;\quad |x| = \frac{1}{9},\ \text{откуда}\ x_{1,2} = \pm\frac{1}{9}.$$

№ 63

Решение.

$$D: \begin{cases} x > 0 \\ -1 \le \log_3 x \le -1 \end{cases};\ \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{3} \le x \le 3 \end{cases}$$

$\arcsin(\log_3 x) < \frac{\pi}{4}$, $-1 \le \log_3 x < \frac{\sqrt{2}}{2}$,

откуда $\frac{1}{3} \le x < 3^{\sqrt{2}/2}$.

№ 64

Решение. Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} 2x + by = c(ac+1) \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-2) \\ \cdot b \end{vmatrix} \begin{cases} -4x - 2by = -c(ac+1), \\ b^2 x + 2by = b(c-1). \end{cases}$$

Складывая уравнения полученной системы, получим:

$$(b^2 - 4)x = -2ac^2 + bc - 2c - b.$$

Если $b \neq \pm 2$, то при любых a и c получим:

$$x = \frac{bc - b - 2ac^2 - 2c}{b^2 - 4}.$$

Аналогично находим $y = \dfrac{bc + abc^2 - 2c + 2}{b^2 - 4}$.

1) Если $b = 2$, то данная система примет вид:

$$\begin{cases} 2x + 2y = c(ac+1), \\ 2x + 2y = c - 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) имеет решение, если выполняется условие $c(ac + 1) = c - 1$, или $ac^2 = -1$.

Полученное уравнение относительно c имеет решение, если $a < 0$.

2) Если $b = -2$, то получим:

$$\begin{cases} 2x - 2y = c(ac+1), \\ -2x + 2y = c - 1. \end{cases}$$

Эта система имеет решение, если $ac^2 + c = -c + 1$, или

$$ac^2 + 2c - 1 = 0, \qquad (2)$$

Квадратное уравнение (2) относительно c имеет решение, если $1 + a \ge 0$, т.е. при $a \le -1$.

Итак, при $-1 \le a < 0$ всегда найдется такое c, что при любом значении b исходная система имеет по крайней мере одно решение.

№ 65

Указание. Учесть, что $\dfrac{n}{(n+1)!}+\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$, тогда данное выражение примет вид $1-\dfrac{1}{2007!}$.

№ 66

Решение.

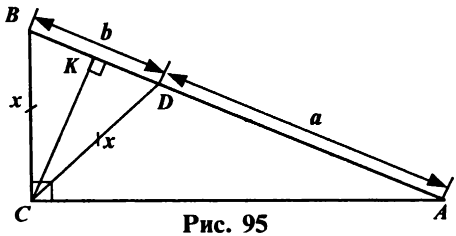


Рис. 95

Пусть в $\Delta\, ABC$ ($\angle C = 90°$), $AD = a$, $BD = b; a - b = BC = CD$. Пусть $a - b = x$. (1)

Из вершины C опустим перпендикуляр CK на гипотенузу AB, тогда $\Delta\, CKB \sim \Delta\, ABC$ (как прямоугольные, имеющие общий $\angle B$).

Следовательно, $\dfrac{BC}{BK}=\dfrac{AB}{BC}$, или $\dfrac{x}{\frac{1}{2}b}=\dfrac{a+b}{x}$, откуда

$2x^2 = b(a + b)$. Учитывая (1), получим $2(a - b)^2 = b(a + b)$, или

$$2a^2-5ab + b^2 = 0. \qquad (2)$$

Так как $a > 0$, $b > 0$, то, разделив обе части (2) на $b^2 \neq 0$,

получим: $2\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-5\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)+1=0;\ D=17>0,\ \left(\dfrac{a}{b}\right)_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}.$

Поскольку, $a > b$, то $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} > 2$, ч. т. д.

№ 67

Ответ: 247; 364, 481, 715, 832.

№ 68

Указание. Замена $3x = y$ приводит исходное уравнение к виду $\sin y(3 - 4\sin^2 y - 4\sin y) = 0$, откуда находим $y = \pi n$, $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, и, далее $x = \frac{\pi n}{3}$, $x = (-1)\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

№ 69

Решение. Поскольку $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,

то $\sin\frac{5\pi}{16} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16}\right) = \cos\frac{3\pi}{16}$

и $\sin\frac{7\pi}{16} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{16}\right) = \cos\frac{\pi}{16}$.

Обозначив данное выражение через A, имеем:

$$A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16} =$$

$$= \left(\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16}\right) =$$

$$= \left(\sin^2\frac{\pi}{16} + \cos^2\frac{\pi}{16}\right)^2 - 2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16} +$$

$$+ \left(\sin^2\frac{3\pi}{16} + \cos^2\frac{3\pi}{16}\right)^2 - 2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(4\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}\right) + 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(4\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8} = 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 1 = 1{,}5.$$

№ 70

Ответ: квадрат со стороной 3 см.

№ 71

Решение. $\log_{12} 60 = \dfrac{\log_2 60}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2(2^2 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_2(2^2 \cdot 3)} =$

$$= \frac{2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 3}.$$

Пусть $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$, тогда $\log_{12} 60 = \dfrac{2 + x + y}{2 + x}$.

Далее имеем: $\log_6 30 = \dfrac{\log_2 30}{\log_2 6} = \dfrac{\log_2(2 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_2(2 \cdot 3)} = \dfrac{1 + x + y}{1 + x}$;

$$\log_{15} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 15} = \frac{\log_2(2^3 \cdot 3)}{\log_2(3 \cdot 5)} = \frac{3 + x}{x + y}.$$

Итак, для нахождения x и y имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x + y}{1 + x} = a, \\ \dfrac{x + 3}{x + y} = b; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + x + y = a(1 + x), \\ x + 3 = b(x + y). \end{cases}$$

Из II уравнения системы $y = \dfrac{x + 3 - bx}{b}$, тогда I уравнение примет вид:

$$1 + x + \frac{x + 3 - bx}{b} = a(1 + x),$$

или $b + bx + x + 3 - bx = ab + abx$, или $x(1 - ab) = ab - b - 3$, откуда $x = \dfrac{ab - b - 3}{1 - ab}$. Подставляя значения x в равенство $y = \dfrac{1}{b}(x + 3 - bx)$, находим:

$$y = \frac{2a - b - 2 + ab}{ab - 1},$$

тогда, после упрощений, получим $\log_{12} 60 = \dfrac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1}$.

№ 72

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -2\log_5 2$.

№ 73

Ответ: нет решений.

№ 74

Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} x^2+x+1\ge 1, \\ \dfrac{x+5}{x+2}\ge 3; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 0<x^2+x+1\le 1, \\ \dfrac{x+5}{x+2}\le 3. \end{cases}$$

Решая каждое из них, находим $(-2;-1]\cup\left[-\dfrac{1}{2};0\right)$.

№ 75

Решение.

$$\mathrm{tg}^2 72°\cdot\mathrm{ctg}^2 54° = (\mathrm{tg}72°\cdot\mathrm{ctg}54°)^2 = (\mathrm{ctg}18°\cdot\mathrm{tg}36°)^2 =$$

$$= (\mathrm{ctg}18°\cdot\mathrm{tg}(2\cdot 18°))^2 = \left(\mathrm{ctg}18°\cdot\frac{2\mathrm{tg}18°}{1-\mathrm{tg}^2 18°}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2 18°}\right)^2 = \frac{4}{(1-\mathrm{tg}^2 18°)^2}.$$

Известно, что $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, тогда $\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$,

значит $1-\mathrm{tg}^2 18° = 2-\dfrac{1}{\cos^2 18°} = 2-\dfrac{16}{10+2\sqrt{5}} =$

$$= \frac{4+4\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, $\mathrm{tg}^2 72°\cdot\mathrm{ctg}^2 54° = 4\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 5.$

Замечание. Здесь мы использовали тот факт, что

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

№ 76

Решение. $\int\limits_0^8 x^2\sqrt{x+1}dx = \int\limits_0^8 (x^2-1+1)\sqrt{x+1}dx =$

$$= \int\limits_0^8 \left((x^2-1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^8 \left((x-1)\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x+1}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^8 \left((x+1-2)\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x+1}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^8 \left((x+1)^{5/2}-2(x+1)^{3/2}+(x+1)^{1/2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2}{7}(x+1)^{7/2}-\frac{4}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right)\Bigg|_0^8 =$$

$$= \frac{2}{7}\cdot 9^{7/2}-\frac{4}{5}\cdot 9^{5/2}+\frac{2}{3}\cdot 9^{3/2}-\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{7}\cdot 3^7-\frac{4}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{3}\cdot 3^3-\left(\frac{30-84+70}{7\cdot 5\cdot 3}\right) =$$

$$= 2\cdot 3^3\cdot\left(\frac{3^4}{7}-\frac{2}{5}\cdot 3^2+\frac{1}{3}\right)-\frac{16}{7\cdot 5\cdot 3} =$$

$$= 54\cdot\left(\frac{81}{7}-\frac{18}{5}+\frac{1}{3}\right)-\frac{16}{7\cdot 5\cdot 3} = \frac{872\cdot 54}{5\cdot 3\cdot 7}-\frac{16}{7\cdot 5\cdot 3} =$$

$$= \frac{47072}{105} = 448\frac{32}{105}.$$

№ 77

Ответ: 13 см.

№ 78

Решение. Искомое число запишем в виде

$$N = 7 \cdot 10^6 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^2 + 7,$$

где $0 \le x \le 9$; $0 \le y \le 9$.

Если числа 10^6, 10^4 и 10^2 разделить на 19, то получим соответственно остатки 11; 6 и 5.

Значит, $7 \cdot 10^6 = 19m_1 + 1$; $x \cdot 10^4 = 19m_2 + 6x$;

$$y \cdot 10^2 = 19m_3 + 5y, \text{ где } m_1, m_2, m_3 \in N.$$

Тогда число N можно записать в виде:

$$N = 19m + 1 + 6x + 5y + 7,$$

или $$N = 19m + (6x + 5y + 8), \text{ где } m \in N.$$

При существующих ограничениях $0 \le x \le 9$ и $0 \le y \le 9$ получим, что $6x + 5y + 8 \le 6 \cdot 9 + 5 \cdot 9 + 8$, или $6x + 5y + 8 \le 107$,

т.е. $19k \le 107$,откуда $k \le \frac{107}{19} = 5\frac{12}{19}$.

Значит $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

1. При $k = 1$, $x = 1$, $y = 1$, тогда $N = 7010107$.
2. При $k = 2$, уравнение $6x + 5y = 30$ не имеет решений в целых числах.
3. При $k = 3$, $x = 4$, $y = 5$, тогда $N = 7040507$.
4. При $k = 4$, $x = 8$, $y = 4$, $N = 7080407$.
5. При $k = 5$, $x = 7$, $y = 9$, $N = 7070907$.

Итак, условию задачи удовлетворяют 4 пары чисел: (1; 1), (4;5), (8;4), (7;9).

№ 79

Решение. Известно, что среднее арифметическое n положительных чисел не меньше их среднего геометрического, поэтому, в частности

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \ge \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

или $\dfrac{3p-(a+b+c)}{3}=\dfrac{3p-2p}{3}=\dfrac{p}{3}\geq\sqrt[3]{\dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Но $S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$, тогда

$\dfrac{p}{3}\geq\sqrt[3]{\dfrac{S^2}{p}}=\sqrt[3]{\dfrac{p^2r^2}{p}}=\sqrt[3]{pr^2}$, или $\dfrac{p}{3}\geq\sqrt[3]{pr^2}$, или $\dfrac{p^3}{27}\geq pr^2$,

откуда
$$p\geq 3\sqrt{3}r. \qquad (1)$$

Так как $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ и $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{ab}{a+b+c}$, то неравенство (1) примет вид:

$\dfrac{1}{2}(a+b+c)\geq 3\sqrt{3}\cdot\dfrac{ab}{a+b+c}$ или $(a+b+c)^2\geq 6\sqrt{3}ab$,

или
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\geq 6\sqrt{3}ab.$$

Поскольку $a^2+b^2=c^2$, то $2c^2+2ab+2ac+2bc\geq 6\sqrt{3}ab$, или $c(a+b+c)\geq(3\sqrt{3}-1)ab$; $a+b+c=2p$, тогда $2pc\geq(3\sqrt{3}-1)ab$, и так как $ab=2S_\Delta$, то $2pc\geq 2(3\sqrt{3}-1)S$ или $c\geq(3\sqrt{3}-1)\dfrac{S}{p}$, откуда $c\geq(3\sqrt{3}-1)r$, что и требовалось доказать.

№ 80

Ответ: $x=4$, $y=4$, $z=1$.

№ 81

Указание.

$$\begin{cases} y=1-\dfrac{2}{x} \\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z. \\ x>0 \end{cases}$$

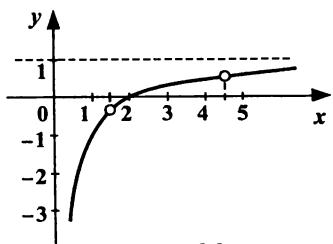


Рис. 96

Строим график (см. рис. 96).

№ 82

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}$.

№ 83

Указание. $\sin^2 2007° =$
$= \sin^2(5 \cdot 360° + 207°) =$
$= \sin^2 207°$, тогда получим
$\sin\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$, откуда находим
$4\pi n - \frac{7\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$.

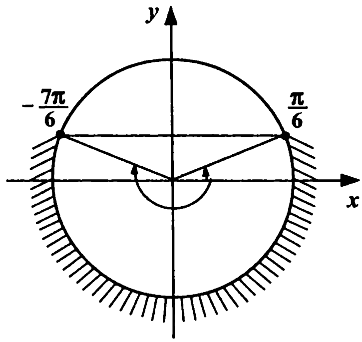


Рис. 97

№ 84

Решение. Пусть $x_1 = \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2},\ x_2 = \log_3 4 = \frac{\lg 4}{\lg 3}$,

$x_3 = \log_4 5 = \frac{\lg 5}{\lg 4}, \ldots, x_6 = \log_7 8 = \frac{\lg 8}{\lg 7}$, где $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_6 > 0$.

Но $\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + \ldots + x_6) \ge \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_6}$, тогда

$$\sqrt[6]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_6} = \sqrt[6]{\frac{\lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg 8}{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg 7}} = \sqrt[6]{\frac{\lg 8}{\lg 2}} = \sqrt[6]{\frac{3\lg 2}{\lg 2}} = \sqrt[6]{3}.$$

Поскольку $\sqrt[6]{3} > 1{,}1$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 > 6{,}6$, значит, $\log_2 3 + \log_3 4 + \ldots + \log_7 8 < 7$.

№ 85

Ответ: $a(a^5 + 9c) = 5b(a^3 + b)$.

№ 86

Указание. Возвести данные равенства в квадрат. Далее сложить и вычесть почленно полученные равенства.

Тогда получим: $\sin(\alpha - \beta) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$.

№ 87

Ответ: $(\pm 3;\ \pm 1)$, $(\pm 1; \mp 3)$, $(\pm 2\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$.

№ 88

Указание. Умножить обе части уравнения на $x > 0$, а затем разделить обе части полученного уравнения на $(2x-3)^3 \neq 0$.

Далее решить полученное уравнение заменой $\frac{\sqrt{x}}{2x-7} = y$. Получим $y^3 - y^2 - 4 = 0$, откуда находим $y = 2$ — единственный корень уравнения. Возвращаясь к старой переменной, получим уравнение $\sqrt{x} = 2(2x-7)$, где $x > 3{,}5$.

Решая полученное уравнение, находим $x = 4$ — корень исходного уравнения.

№ 89

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \sin 4\alpha$.

№ 90

Решение. Если x_1 и x_2 — корни трехчлена, то по теореме Виета, имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = -\dfrac{1}{2p^2}. \end{cases}$$

Кроме того, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 + \frac{1}{p^2} \geq 2,$$

тогда $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2x_2^2 =$

$$= \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2p^2}\right)^2 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4};$$

$$x_1^6+x_2^6=(x_1^4+x_2^4)(x_1^2+x_2^2)-x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2)=$$

$$=\left(p^4+2+\frac{1}{2p^4}\right)\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)-\frac{1}{4p^4}\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)=$$

$$=\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)\left(p^4+2+\frac{1}{4p^4}\right)=p^6+3p^2+\frac{9}{p^2}+\frac{1}{4p^6}=$$

$$=\left(p^6+\frac{1}{4p^6}\right)+\left(3p^2+\frac{9}{p^2}\right)\geq 2\sqrt{p^6\cdot\frac{1}{4p^6}}+2\sqrt{3p^2\cdot\frac{9}{p^2}}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 3\sqrt{3}=1+6\sqrt{3}>11, \text{ ч. т. д.}$$

№ 91

Решение. Известно, что $a_1a_2+b_1b_2\leq\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}$.

Это частный случай неравенства Коши–Буняковского, при $n=2$.

Если векторы $\bar{a}(a_1, b_1)$ и $\bar{b}(a_2, b_2)$ коллинеарны, то выполняется знак равенства.

Преобразуем данное уравнение:

$$x\sqrt{10-16x^2}+240\sqrt{1+x^2}=\sqrt{26(x^2+225)}.$$

Раздели обе части уравнения на 4:

$$\frac{x}{4}\sqrt{10-16x^2}+60\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{4}\sqrt{26(x^2+225)},$$

или $x\sqrt{\frac{5}{8}-x^2}+60\sqrt{1+x^2}=\sqrt{\frac{13}{8}(x^2+225)}.$

Тогда $x\sqrt{\frac{5}{8}-x^2}+15\cdot 4\sqrt{1+x^2}\leq$

$$\leq\sqrt{x^2+225}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{8}-x^2\right)+(1+x^2)}=$$

$$= \sqrt{x^2 + 225} \cdot \sqrt{\frac{5}{8} + 1} = \sqrt{\frac{13}{8}(x^2 + 225)}.$$

Следовательно векторы $(x;\ 15)$ и $\left(\sqrt{\frac{5}{8} - x^2};\ 4\sqrt{1 + x^2}\right)$

коллинеарны, т.е. выполняется условие:

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{8} - x^2}} = \frac{15}{4\sqrt{1 + x^2}}, \text{ где } \frac{5}{8} - x^2 > 0;\ x > 0.$$

Тогда $\dfrac{x^2}{\frac{5}{8} - x^2} = \dfrac{225}{16(1 + x^2)}$, или $16x^2(1 + x^2) = 225\left(\frac{5}{8} - x^2\right)$.

Далее заменой $x^2 = y$, где $y \geq 0$, полученное уравнение приводится к виду $128y^2 + 1928y - 1125 = 0$, корни которого $y_1 = \frac{9}{16}$, $y_2 < 0$ (не подходит).

Тогда $x^2 = \frac{9}{16}$, $x = \frac{3}{4}$, так как $x > 0$.

Итак, $x = \frac{3}{4}$ — единственный корень исходного уравнения.

№ 92

Указание. Упростить II уравнение системы, умножив и разделив левую часть на $\sqrt{y} - \sqrt{y - 2x}$. Полученное уравнение вместе со II образует систему, которую решаем сложением.

Тогда получим $2\sqrt{y} = \sqrt{2}(1 + x)$, откуда $y = \frac{1}{2}(1 + x)^2$.

Далее, подставляем значение y в I уравнение исходной системы. В результате получим уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, откуда $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 2$.

Учитывая, что $y=\frac{1}{2}(1+x)^2$, находим решение исходной системы: (1; 2) ,(–1; 0), (2; 4,5), (–2; 0,5).

№ 93

Указание. Учесть, что $8 + 2x - x^2 = 9 - (x - 1)^2$, тогда

$$\log_3(9 - (x - 1)^2) \le \log_3 9 = 2.$$

Кроме того, $\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi x}{4} \ge 2$, откуда получим $x = 1$.

№ 94

Решение. Пусть $f(x) = 7\operatorname{tg}^3 x - 6$, тогда $7\operatorname{tg}^3 x = f(x) + 6$, или $7\operatorname{tg}^3 x = \frac{1}{7}(f(x)+6)$, откуда $\operatorname{tg}x = \sqrt[3]{\frac{1}{7}f(x)+6}$, т.е. $g(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{7}f(x)+6}$ — обратная функция (правая часть исходного уравнения). Тогда $g(x) = f(x)$, $f(x)$ — монотонно возрастающая на области определения, значит, $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = x$, или $7\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}x - 6 = 0$. Пусть $\operatorname{tg}x = y$, тогда $7y^3 - y - 6 = 0$, или $7y(y^2 - 1) + 6(y - 1) = 0$,

$$(y - 1)(7y^2 + 7y + 6) = 0,$$

откуда $y = 1$.

Уравнение $7y^2 + 7y + 6 = 0$ не имеет действительных корней. Итак, $y = 1$, тогда $\operatorname{tg}x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

№ 95

Ответ: [1; 1,25].

№ 96

Решение. Пусть $a_0 = \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{19}$ корень искомого многочлена. Так как $a_0^3 = (\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{19})^3 = 7 + 19 + 3\sqrt[3]{7\cdot 19}\cdot(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{19}) = 26 + 3\sqrt[3]{133}a_0$, то $a_0^3 - 26 = 3\sqrt[3]{133}a_0$, откуда

$$(a_0^3-26)^3=(3\sqrt[3]{133}a_0)^3,$$

или $a_0^9-78a_0^6+2028a_0^3-17576=3591a_0^3$,

или $a_0^9-78a_0^6-1563a_0^3-17576=0$.

Заметим, что в качестве искомого многочлена можно взять многочлен $f(a)=a_0^9-78a_0^6-1563a_0^3-17576$.

При этом, если этот многочлен умножить на любой многочлен с целыми коэффициентами, то мы опять получим многочлен, для которого число a_0 является корнем.

№ 97

Ответ: $\dfrac{3a\sqrt{2b\sqrt{a^2+b^2}}}{2(\sqrt{a^2+b^2}+b)}$.

№ 98

Указание. Пригодны формулы:

$x=a^{13}-78a^{11}b^2+715a^9b^4-1716a^7b^6+1287a^5b^8-$
$-286a^3b^{10}+13ab^{12}$;

$y=13a^{12}b-286a^{10}b^3+1287a^8b^5-1716a^6b^7+715a^4b^9-$
$-78a^2b^{11}+b^{13}$;

$z=a^2+b^2$.

Например, при $a=2$, $b=1$ получим: $x=33802$; $y=8839$; $z=5$, тогда $33802^2+8839^2=5^{13}$.

Замечание. Представляет интерес решение уравнения $x^2+y^2=z^n$, где $n\geq 2$ в общем виде.

№ 99

Ответ: $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{6}\sqrt{3\sqrt{3}(2\pi-\sqrt{3})}$.

№ 100

Решение.

1. Строим равносторонний $\Delta\, NMB$.
2. Соединим точки A и M.

3. $\Delta ABM = \Delta CBN$ (по двум сторонам и углу между ними):

$AB = BC$ (по условию),

$BN = BM$ (по построению),

$\angle CBN = \angle ABM$.

4. Из равенства треугольников $\Rightarrow CN = AM = 4$.

5. Выходит, что ΔAMN — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), так как $3^2 + 4^2 = 5^2$.

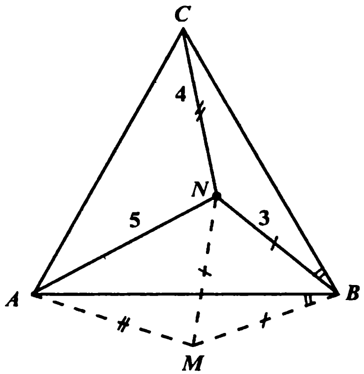


Рис. 98

6. Из ΔAMB, где $\angle AMB = 90° + 60° = 150°$, найдем длину AB по теореме косинусов:

$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cdot \cos 150°$,

$AB^2 = 25 - 24\cos(90° + 60°) = 25 - 24 \cdot (-\sin 60°) =$

$= 25 + 12\sqrt{3}$, откуда $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} \approx 6{,}8$ (см).

№ 101

Ответ: (31; 0; 34), (7; 2; 6).

№ 102

Указание. Записать уравнение в виде $2x^3 = (x-2)^3$, откуда находим $x = \dfrac{2}{1 - \sqrt[3]{2}}$.

№ 103

Решение. $3^{2007} + 7^{2007} = (3^3)^{669} + (7^3)^{669}$. Следовательно, данное число делится на $3^3 + 7^3 = 370 = 37 \cdot 10$ — делится на 37.

№ 104

Решение. $(m-3)^2 + (m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 + (m+3)^2 = 7m^2 + 28 = 7(m^2 + 4)$.

Чтобы полученное выражение было полным квадратом, необходимо, чтобы $m^2 + 4$ было кратно 7, что невозможно, так как $m^2 + 4$ может оканчиваться цифрами 4, 5, 8, 3, 0, 9.

№ 105

Решение. $x^{13}+x^{11}+1=x^{13}+x^{12}+x^{11}-x^{12}+1=$

$$=x^{11}(x^2+x+1)-(x^{12}-1)=x^{11}(x^2+x+1)-(x^6-1)(x^6+1)=$$
$$=x^{11}(x^2+x+1)-(x^3-1)(x^3+1)(x^6+1)=$$
$$=x^{11}(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)(x^6+1)=$$
$$=(x^2+x+1)(x^{11}-(x^4-x^3+x-1)(x^6+1))=$$
$$=(x^2+x+1)(x^{11}-x^{10}+x^9-x^7+x^6-x^4+x^3-x+1).$$

№ 106

Ответ: $\dfrac{a^2}{2}\sin(30°-\alpha)\sin(30°+\alpha)\mathrm{ctg}\alpha.$

№ 107

Указание. Записать уравнение в виде $(2x-1)^3=2a-1$, откуда находим $x=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt[3]{2a-1})$.

№ 108

Указание. $(\sqrt{x}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{2})^2=0$, откуда находим: $x = 3$; $y = 2$.

№ 109

Решение. Упростим левую часть уравнения:

$$9^{\sin^2\frac{\pi x}{4}}+9^{\cos^2\frac{\pi x}{4}}=9^{\sin^2\frac{\pi x}{4}}+9^{1-\sin^2\frac{\pi x}{4}}=9^{\sin^2\frac{\pi x}{4}}+\frac{9}{9^{\sin^2\frac{\pi x}{4}}}. \quad (1)$$

Пусть $9^{\sin^2\frac{\pi x}{4}}=t$, где $t>0$, тогда правая часть (1) примет вид $t+\dfrac{9}{t}$.

Но $t+\frac{9}{t}\geq 2\sqrt{t+\frac{9}{t}}\geq 6$.

Упростим правую часть уравнения:

$$\sqrt{34+4x-2x^2}=\sqrt{-2(x-1)^2+36}\leq 36=6.$$

Таким образом, левая часть уравнения принимает значения большие или равные 6, а правая часть – меньшие или равные 6.

Тогда равенство выполняется при условии, что обе части уравнения равны 6, т.е. при $x = 1$, так как при этом получим: $9^{\sin^2\frac{\pi x}{4}}+9^{\cos^2\frac{\pi x}{4}}=9^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{1}{2}}=6$.

Итак $x = 1$ — корень исходного уравнения.

№ 110

Ответ:

- если $a = -1$, то $x = -2$;
- если $a = 0$, то корней нет;
- если $a = 1$, то $x = 2$;
- если $a\neq\pm1$, $a\neq 0$, то $x=a+\frac{1}{a}$.

№ 111

Решение. Заметим, что $6^5 + 1$ делится на 11, следовательно, $6^{10} - 1$ тоже делится на 11, т.е. 6^{10} при делении на 11 дает в остатке 1, а следовательно, и $6^{10\cdot 59} = 6^{590}$ тоже при делении на 11 будет давать в остатке 1. Но $6^{592} = 6^{590}\cdot 6^2$, и остаток от деления 6^{592} на 11 будет такой же, что и остаток от деления 6^2 на 11, т.е. равен 3.

№ 112

Решение. Так как $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$, то получим уравнение:

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\arccos x=\frac{\pi^2}{18}. \qquad (1)$$

Пусть $\arccos x = y$, где $0 \le y \le \pi$, тогда (1) примет вид $\left(\frac{\pi}{2} - y\right)y = \frac{\pi^2}{18}$, или $y^2 - \frac{\pi}{2}y + \frac{\pi^2}{18} = 0$, откуда находим $y_1 = \frac{\pi}{3}$; $y_2 = \frac{\pi}{6}$.

Заметим, что оба корня удовлетворяют условию $y \in [0; \pi]$.

Если $y = \frac{\pi}{3}$, то $\arccos x = \frac{\pi}{3}$, $x_1 = \frac{1}{2}$;

если $y = \frac{\pi}{6}$, то $\arccos x = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

№ 113

Ответ: $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1 - \sqrt{7}); \cos\frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{7})\right)$.

№ 114

Ответ: [–4; 0,6].

№ 115

Решение. Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} (8x^3 - y^3)z = 4y^2 - x^2, & (1) \\ 9x^2yz^2 - 5xy^2z = 30, & (2) \\ (2x - y)z = 1. & (3) \end{cases}$$

Преобразуем уравнение (1):

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)z = 4y^2 - x^2.$$

Учитывая (3), имеем $4x^2 + 2xy + y^2 = 4y^2 - x^2$,

или
$$5x^2 + 2xy - 3y^2 = 0. \qquad (4)$$

Решая (4) как квадратное относительно y, находим $x_1 = \frac{3}{5}y$, $x_2 = -y$.

Имеем две возможности:

1) $x=\frac{3}{5}y$,тогда (3)примет вид $\left(\frac{6}{5}y-y\right)z=1$, или $z=\frac{5}{y}$.

Подставим значения x и z в (2):

$$81y-15y^2=30,\text{ или }5y^2-27y+10=0,$$

откуда $y_1=5$; $y_2=\frac{2}{5}$, тогда $x_1=\frac{3}{5}\cdot 5=3$; $x_2=\frac{6}{25}$; $z=\frac{5}{y}$; $z_1=1$; $z_2=\frac{25}{2}$.

2) $x=-2$. В этом случае $z=-\frac{1}{3y}$ и $5y^2-3y+90=0$ — нет действительных корней, так как $D<0$.

Итак, решением исходной системы являются две тройки чисел (3; 5; 1), $\left(\frac{6}{25};\frac{2}{5};\frac{25}{2}\right)$.

№ 116

Указание. Применить признаки делимости на 3, 5 и 9.

№ 117

Указание. $ax^3+bx^2+cx+d=(Ax+B)^3$,
откуда $a=A^3$; $b=3A^2B$; $c=3AB^2$; $d=B^3$.

Далее имеем: $A=\sqrt[3]{a},\ B=\sqrt[3]{d}$,
откуда находим $b=3\sqrt[3]{a^2d},\ c=3\sqrt[3]{ad^2}$.

Это и есть условие, необходимое и достаточное.

№ 118

Указание. Если m нечетное, то делится, если m четное, то не делится. Положить $x=0$.

№ 119

Ответ: $(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$.

№ 120

Решение.

Прибавим по единице к каждому из уравнений системы:

$$\begin{cases} x+y+xy+1=42 \\ x+z+yz+1=27 \\ y+z+yz+1=126 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} (x+1)(y+1)=42 \\ (x+1)(z+1)=27 \\ (y+1)(z+1)=126 \end{cases} \qquad (1)$$

Перемножив уравнения системы (1), получим

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=42\cdot 27\cdot 126,$$

откуда

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 378. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2) с каждым из уравнений системы (1), получим две тройки чисел: (–4; –15; –10), (2; 13; 8).

№ 121

Указание. Заменой $y=px$ данное уравнение примет вид $(px)^x=x^{px}$, откуда находим $x=p^{\frac{1}{p-1}}$, $y=p^{\frac{p}{p-1}}$.

№ 122

Ответ: 813.

№ 123

Указание. Треугольники, стороны которых целые и взаимно простые, не существуют. Однако, существуют 2 треугольника, удовлетворяющих условию задачи:

1) 546, 728, 910 и 2) 534, 712, 890.

№ 124

Решение. Пусть $a, b, c \in N$ — длины сторон треугольника с диаметром $2R$=6,25 описанной окружности. Пусть S — площадь и $p \doteq \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника. Заметим, что $a, b, c \leq 2R$, тогда $a, b, c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Известно, что $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow abc = 4RS \Rightarrow (abc)^2 =$

$= (4SR)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)(4R)^2,$

откуда $64a^2b^2c^2 = 625(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$.

Значит, число $64a^2b^2c^2$ делится на 625, тогда, по крайней мере два из трех чисел a, b, c равны 5. Пусть для определенности $a = b = 5$, тогда имеем: $64c^2 = (10+c)\cdot c^2(10-c)$, т.е. $100 - c^2 = 64$, $c^2 = 36$, $c = 6$.

Итак, имеем тройку чисел (5; 5; 6), удовлетворяющую условию задачи.

№ 125

Указание. После применения формул понижения степени $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ и $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, данное уравнение примет вид:

$$\cos^2 4x + 14\cos 4x = \frac{97}{4} - 17 = \frac{29}{4},$$

т.е. $\left(\cos 4x + \dfrac{29}{2}\right)\left(\cos 4x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$ или $\cos 4x = \dfrac{1}{2}$.

Поскольку $4x \in [0; 2\pi]$, имеем $4x \in \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$, откуда $x_1 = \dfrac{\pi}{12}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{12}$.

№ 126

Ответ: $k = 56$, $m = 15$, $n = 13$.

№ 127

Решение.

Пусть $a = 3m$, $c = 2b - 3m$, тогда $x + y = a + b + c = 3b$.

Учитывая подстановки, упростим II уравнение системы:

$9m^2 + b^2 + (2b - 3m)^2 = (x+y)^2 - 2xy$,

или $9m^2 + b^2 + 4b^2 - 12bm + 9m^2 = 9b^2 - 2xy$,
откуда $xy = 2b^2 + 6bm - 9m^2$.

Но $x + y = 3b$, тогда $(x + y)^2 = 9b^2$
и $(x - y)^2 = 9b^2 - 4xy = b^2 - 24bm + 36m^2$,
или
$$(x - y)^2 = (b - 12m)^2 - 108m^2. \qquad (1)$$

Равенство (1) удовлетворяется, например, при
$x - y = p^2 - 27q^2$
$b - 12m = p^2 + 27q^2$
$m = pq$; тогда $a = 3m = 3\,pq$,
$b = p^2 + 12pq + 27q^2$, $c = 2b - 3m = 2p^2 + 21pq + 54q^2$.

Значения x и y найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3b \\ x - y = p^2 - 27q^2 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 2p^2 + 18pq + 27q^2 \\ y = p^2 + 18pq + 54q^2. \end{cases}$$

Итак, мы находим решение системы, где р и q выступают в виде периметра и числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию:

$$\begin{cases} a = 3pq, \\ b = p^2 + 12pq + 27q^2, \\ c = 2p^2 + 21pq + 54q^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2p^2 + 18pq + 27q^2, \\ y = p^2 + 18pq + 54q^2. \end{cases}$$

Замечание. Система вида $\begin{cases} a + b + c = x + y, \\ a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3 \end{cases}$ была решена в 1969 г. американским математиком У. Бландоном (См.: *Тригг Ч.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975. № 271.)

Раздел III

УДИВИТЕЛЬНЫЕ РАВЕНСТВА

№ 1

Число Шехерезады 1001. С точки зрения математики оно обладает целым рядом интереснейших свойств:

1) это наименьшее натуральное четырехзначное число, которое можно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел:
$$1001 = 10^3 + 1^3;$$
2) число 1001 состоит из 77 чертовых дюжин:
$$1001 = 77 \cdot 13,$$
из 91 одиннадцаток или 143 семерок (7 — магическое число):
$$1001 = 91 \cdot 11; \qquad 1001 = 143 \cdot 7;$$
3) если считать, что год равен 52 неделям, то 1001 ночь состоит:
$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{ года } (52 \cdot 7 + 52 \cdot 7 + 26 \cdot 7 + 13 \cdot 7);$$
4) на свойствах числа 1001 основан признак делимости на 7, на 11 и на 13.

№ 2

Задача Диофанта. Найти такие 3 числа, сумма которых, а так же сумма каждой пары этих чисел была бы квадратом другого числа:

$80 + 320 + 41 = 21^2;$ $\qquad$ $80 + 41 = 11^2;$

$320 + 41 = 19^2;$ $\qquad$ $80 + 320 = 20^2.$

№ 3

Игра с цифрами.

$123 - 45 - 67 + 89 = 100$ (минимальное число знаков 3).

$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$ (минимальное число знаков 4).

№ 4

Квадратный корень из феодализма:

$$\sqrt{\textit{феодализм}} = \textit{еедди}, \text{ или } \sqrt{523814769} = 22887.$$

Число 523814769 содержит все цифры, кроме нуля.

№ 5

Квадраты чисел, состоящих из единиц:

$11^2 = 121$; $111^2 = 12321$; $1111 = 1234321$;

$11111^2 = 123454321$ и т.д.

$111\,111\,111^2 = 12345678987654321$.

Как видим, средняя цифра показывает количество единиц, а от нее влево и вправо, цифры уменьшаются последовательно до единицы.

№ 6

Любопытное тождество:

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

Правая часть тождества содержит те же буквы и те же математические знаки, но не содержит показателей степени. Например:

$$\frac{25^3+11^3}{25^3+(25-11)^3} = \frac{25+11}{25+(25-11)} = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}.$$

Равенство верное, хотя так сокращать нельзя. В чем же тогда проблема?

№ 7

Игры с числами.

1) $145 = 1! + 4! + 5!$, где ! — знак факториала, т.е. $1! = 1$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$;
2) $387420489 = 3^{87+420-489}$;
3) $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \sqrt{1^3+2^3+3^3}$.

№ 8

Записать число 65636, используя одну цифру и одно действие.

$$65636 = 2^{2^{2^{2}}}$$

№ 9

Числовые треугольники:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 65 \\ +\quad 465 \\ 9465 \\ \underline{19465} \\ 29465 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 48 \\ 648 \\ +\quad 9648 \\ 89648 \\ \underline{189648} \\ 289648 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ 17 \\ 417 \\ 3417 \\ 53417 \\ +\quad 453417 \\ 7453417 \\ 67453417 \\ 567453417 \\ 3567453417 \\ \underline{73567453417} \\ 77777777777 \end{array}$$

№ 10

Числовая пирамида: $1 \cdot 8 + 1 = 9$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 8 + 2 &= 98 \\ 123 \cdot 8 + 3 &= 987 \\ 1234 \cdot 8 + 4 &= 9876 \\ 12345 \cdot 8 + 5 &= 98765 \\ 123456 \cdot 8 + 6 &= 987654 \\ 1234567 \cdot 8 + 7 &= 9876543 \\ 12345678 \cdot 8 + 8 &= 98765432 \\ 123456789 \cdot 8 + 9 &= 987654321 \end{aligned}$$

№ 11

Совершенные числа. Так называются натуральные числа, равные сумме всех своих делителей (не считая самого числа).

Наименьшим совершенным числом является 6:

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

За ним следует число 28:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

далее число 496:

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Эти (и другие) числа могут быть найдены по формуле:

$$P = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

где p — простое число.

До сих пор неизвестно, существует ли хотя бы одно нечетное совершенное число. По последним сообщениям Брайена Таккермана из IBM (амер. фирма, выпускающая вычислительное оборудование) нечетное совершенное число должно иметь по крайней мере 36 знаков.

№ 12

Дружественные числа. Если сумма делителей одного из двух чисел равна второму числу, и наоборот, то такие числа называют дружественными.

В действительности греки знали всего лишь одну пару таких чисел, а именно:

$$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11; \qquad 284 = 2^2 \cdot 71.$$

Суммами их делителей являются соответственно:

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284,$

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$

Следующую пару удалось найти Пьеру Ферма:

$$17296 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47; \qquad 18416 = 2^4 \cdot 1151.$$

Известны, по крайней мере, 42 пары дружественных чисел. Не было найдено случая, когда одно число четное, а другое нечетное, хотя поиски чисел такого вида проводились среди всех чисел $n \leq 3 \cdot 10^9$.

№ 13

Арифметический курьез:

$$2^5 \cdot 9^2 = 2592.$$

№ 14(А)

Свойство числа 803:

$$803 = (8 + 0 + 3)(8^2 + 0^2 + 3^2).$$

Существует ли еще трехзначное число, обладающее указанным свойством?

№ 15

Число 365. Это, как известно, число дней в году.

Кроме того, $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$.

Более того, $365 = 13^2 + 14^2$.

№ 16

Три девятки:

$$999 \cdot 426 = \underline{425}574,$$
$$999 \cdot 107 = \underline{106}893,$$
$$999 \cdot 963 = \underline{962}037.$$

Как видно, первые три цифры произведения есть умножаемое число, уменьшенное на 1, а остальные три цифры дополняют найденные три цифры до 9.

№ 17

Еще одно свойство числа 1001:

$295 \cdot 1001 = 295295,$ $\qquad$ $768 \cdot 1001 = 768768.$

При умножении числа Шехеразады на трехзначное число, получается умноженное число, записанное дважды.

№ 18

Число 10101. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, но не трехзначных чисел, а двузначных:

$$76 \cdot 10101 = 767676,$$
$$11 \cdot 10101 = 111111,$$
$$29 \cdot 10101 = 292929.$$

Каждое двузначное число, умноженное на 10101, дает в результате само число, написанное трижды.

№ 19

Число 10001. Оно представляет собой произведение только двух простых чисел:

$$10001 = 73 \cdot 137.$$

№ 20

Число 111111:

$$111111 = 3 \cdot 37037 = 7 \cdot 15873 = 11 \cdot 10101 = 13 \cdot 8547 = \\ = 37 \cdot 3003 = 21 \cdot 5291 = 33 \cdot 3367.$$

№ 21

Числа, состоящие из единиц:

$$111 = 3 \cdot 37$$
$$1111 = 11 \cdot 101$$
$$11111 = 41 \cdot 271$$
$$111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$$
$$1111111 = 239 \cdot 4649$$
$$11111111 = 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137$$
$$111111111 = 9 \cdot 37 \cdot 333667$$
$$1111111111 = 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091$$
$$11111111111 = 21649 \cdot 513239$$
$$111111111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901$$

Все множители в правой части равенств — простые числа.

№ 22

Число 142857. Если сложить это число с числом, у которого цифра 1 перенесена в конец, то получим тот же ряд цифр:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ +\,428571 \\ \hline 571428 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 285714 \\ +\,571428 \\ \hline 857142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714285 \\ +\,142857 \\ \hline 857142 \end{array} \text{ и т.д.}$$

Тот же ряд цифр в той же последовательности получим и при вычитании чисел:

$$\begin{array}{r} 428571 \\ -\,142857 \\ \hline 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 571428 \\ -\,285714 \\ \hline 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714285 \\ -\,142857 \\ \hline 571428 \end{array}$$

№ 23

Другие свойства числа 142857:

$$142857 \cdot 2 = 285714,$$
$$142857 \cdot 3 = 428571,$$
$$142857 \cdot 4 = 571428,$$
$$142857 \cdot 5 = 714285,$$
$$142857 \cdot 6 = 857142.$$

№ 24

Число 100:

$$91 + \frac{5823}{647} = 100,$$
$$94 + \frac{1578}{263} = 100,$$
$$96 + \frac{1428}{357} = 100.$$

Во всех случаях употреблены все натуральные числа от 1 до 9. Существуют и другие равенства.

№ 25

Число 12345679. Если умножить это число на число, кратное 9, то получим число с одинаковыми цифрами:

$$12345679 \cdot 9 = 111111111$$
$$12345679 \cdot 18 = 222222222$$
$$12345679 \cdot 27 = 333333333$$
$$12345679 \cdot 36 = 444444444$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$12345679 \cdot 99 = 999999999$$

№ 26(А)

Сумма равна произведению:

$2 + 2 = 2 \cdot 2;$ $\quad$ $3 + 1,5 = 3 \cdot 1,5;$

$11 + 1,1 = 11 \cdot 1,1;$ $\quad$ $21 + 1\frac{1}{20} = 21 \cdot \frac{1}{20}$, и т.д.

№ 27(А)

Разность равна произведению:

$$1 - 0,5 = 1 \cdot 0,5; \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3};$$

$$6 - \frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{6}{7}; \qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}, \text{ и т.д}$$

№ 28(А)

Равные дроби:

$$\frac{41}{77} = \frac{4141}{7777} = \frac{414141}{777777}.$$

№ 29(А)

12 = 13?

Рассмотрим верное равенство:

$$24 + 36 - 60 = 26 + 39 - 65,$$

или $$12 \cdot (2 + 3 - 5) = 13 \cdot (2 + 3 - 5).$$

Так как произведения равны и вторые сомножители равны, то 12 = 13. Где же ошибка?

№ 30

Число равно своей половине: $a = \frac{1}{2}a$?

Известно, что $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Пусть $b = a$, тогда $a^2 - a^2 = (a + a)(a - a)$, или $a(a - a) = (a + a)(a - a)$, или, сократив на $a - a$, получим $a = a + a$, или $a = 2a$, откуда $\frac{a}{2} = a$, т.е. половина равна целому.

№ 31

Интересное произведение.

6 · 21 = 126 — произведение записано цифрами сомножителей, но в обратном порядке.

Аналогично 3 · 51 = 153.

Существуют ли аналогичные произведения?

№ 32

Интересное сокращение дроби:

$$\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Равенство верное, хотя так сокращать нельзя.

Аналогично:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}; \quad \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}.$$

Можно ли подобрать еще такую правильную дробь?

№ 33

Равны ли суммы чисел?

$$\begin{array}{rl} & 123456789 \\ & 12345678 \\ & 1234567 \\ & 123456 \\ + & 12345 \\ & 1234 \\ & 123 \\ & 12 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1 \\ & 21 \\ & 321 \\ & 4321 \\ + & 54321 \\ & 654321 \\ & 7654321 \\ & 87654321 \\ & 987654321 \end{array}$$

№ 34

Разные действия, один результат:

$$2 + 2 = 2 \cdot 2,$$
$$1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$
$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4,$$
$$1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5,$$
$$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3,$$
$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

и т.д. можно составить группы из 6 или 7 и т.д. чисел.

№ 35

$9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$.

Составить аналогичное равенство из этих же чисел в том же порядке, используя лишь знаки сложения.

№ 36

Четыре действия арифметики.

$$1\ 2\ 3 = 1,$$
$$1\ 2\ 3\ 4 = 1,$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 1,$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 = 1,$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 = 1,$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 = 1,$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 1.$$

Расставить между цифрами знаки « + », «–», «·», «:» и скобки (если понадобятся), чтобы в каждом ряду получилось бы по 1.

В случае необходимости, две рядом стоящие цифры можно считать двузначным числом.

№ 37

Сумма двух дробей равна 1:

$$0{,}5 + \frac{1}{2}\ (9 - 8)(7 - 6)(4 - 3) = 1.$$

Аналогично $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1.$

Во всех случаях употреблены все цифры от 0 до 9 (по одному разу).

Можно ли составить аналогичные равенства?

№ 38

Сумма смешанных дробей равна 100.

Например:

$$78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100, \text{ или } 50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100.$$

Здесь также каждая цифра употреблена 1 раз.

Возможны другие решения.

№ 39

«Шкатулка равенств»:

$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22;$

$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2;$

$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3;$

$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4;$

$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$

№ 40

Свойства числа 37:

1) $37 \cdot 3 = 111,$ $\quad 37 \cdot 6 = 222,$
   $37 \cdot 9 = 333,$ $\quad 37 \cdot 12 = 444,$
   $37 \cdot 27 = 999;$
2) $37 \cdot (3 + 7) = 3^3 + 7^3;$
3) $(3^2 + 7^2) - 3 \cdot 7 = 37.$

Аналогичным свойством обладает еще одно двузначное число. Какое?

№ 41

Узоры цифр.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 77 \\ 77 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 49 \\ 4949 \end{array} \\ \hline 5929 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 77 \\ 77 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 7 \\ 777 \end{array} \\ \hline 847 \times 7 = 5929 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 666 \\ 666 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 36 \\ 3636 \\ 363636 \\ 3636 \\ 36 \end{array} \\ \hline 443556 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \times \begin{array}{r} 666 \\ 666 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 6 \\ 666 \\ 66666 \end{array} \\ \hline 73926 \times 6 = 443556 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
\times\ \begin{array}{r} 777\,777\,777\,777 \\ \underline{777\,777\,777\,777} \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
49 \\
4949 \\
49494949 \\
4949494949 \\
494949494949 \\
49494949494949 \\
4949494949494949 \\
494949494949494949 \\
49494949494949494949 \\
4949494949494949494949 \\
494949494949494949494949 \\
4949494949494949494949 \\
49494949494949494949 \\
494949494949494949 \\
4949494949494949 \\
49494949494949 \\
494949494949 \\
4949494949 \\
494949 \\
4949 \\
49 \\
\hline
604938271603728395061729
\end{array}
$$

№ 42

Все цифры различные:

$1738 \cdot 4 = 6952$, $1963 \cdot 4 = 7852$, $198 \cdot 27 = 5346$, $138 \cdot 42 = 5796$, $483 \cdot 12 = 5796$, $297 \cdot 18 = 5346$, $157 \cdot 28 = 4396$, $186 \cdot 39 = 7254$.

№ 43

Верные равенства с одинаковыми цифрами:

$42 : 3 = 4 \cdot 3 + 2$, $5^{6-2} = 625$,

$63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3,$

$95 : 5 = 9 + 5 + 5,$

$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16.$

$4 \cdot 2^3 = 4^3 : 2 = 34 - 2.$

$(8 + 9)^2 = 289,$

$2^{10} - 2 = 1022,$

$2^{8-1} = 128,$

№ 44

Извлечение корней:

$\sqrt{121} = 12 - 1,$

$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4},$

$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = 9 - \sqrt{4},$

$\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9,$

$\sqrt{256} = 2 \cdot 5 + 6,$

$\sqrt{324} = 3 \cdot (2 + 4),$

$\sqrt{11881} = 118 - 8 - 1,$

$\sqrt{1936} = -1 + 9 + 36,$

$\sqrt[3]{1331} = 1 + 3 + 3 + 1 + 3$

$\sqrt[6]{24794911296} = 2 + 4 + 7 + 9 + 4 + 9 + 1 + 1 + 2 + 9 + 6 = 54,$

$\sqrt[8]{248155780267521} = 2 + 4 + 8 + 1 + 5 + 5 + 7 + 8 +$
$+ 0 + 2 + 6 + 7 + 5 + 2 + 1 = 63,$

$\sqrt{81} = 8 + 1,$

$\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2,$

$\sqrt[3]{19683} = 1 + 9 + 6 + 8 + 3,$

$\sqrt[4]{1679616} = 1 + 6 + 7 + 9 + 6 + 1 + 6,$

$\sqrt[6]{830376525} = 8 + 3 + 0 + 3 + 7 + 6 + 5 + 2 + 5.$

№ 45

С помощью суммы факториалов своих цифр.

$$40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$$

№ 46

Узоры чисел:

$$147 \cdot (14 + 7) = 14^3 + 7^3,$$
$$148 \cdot (14 + 8) = 14^3 + 8^3,$$
$$111 \cdot (11 + 1) = 11^3 + 1^3,$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3(1 + 2 + 3) = 1^3 + 2^3 + 3^3.$$

№ 47

Снежинки-цифры:

$$16 = 4^2,$$
$$1156 = 34^2,$$
$$111556 = 334^2,$$
$$11115556 = 3334^2,$$
$$1111155556 = 33334^2 \text{ и т.д.}$$

№ 48

Все цифры от 1 до 9 включительно:

$$1 = 1^{23456789}; \quad 2 = \frac{13458}{6729}; \quad 3 = \frac{17469}{5823};$$
$$4 = \frac{15768}{3942}; \quad 5 = \frac{13485}{2697}; \quad 6 = \frac{17658}{2943};$$
$$7 = \frac{16758}{2394}; \quad 8 = \frac{25496}{3187}; \quad 9 = \frac{57429}{6381}.$$

№ 49

Все цифры от 0 до 9 включительно:

$$9 = \frac{97524}{10836} = \frac{95823}{10647} = \frac{57429}{06381} = \frac{95742}{10638} = \frac{75249}{08361} = \frac{58239}{06471}.$$

Попытайтесь составить и другие однозначные числа из всех десяти цифр.

№ 50

Сумма и произведение чисел каждой пары отличаются только расположением цифр:

$$9 + 9 = 18, \qquad 9 \cdot 9 = 81,$$

$24 + 3 = 27,$ $\quad 27 \cdot 3 = 72,$
$47 + 2 = 49,$ $\quad 47 \cdot 2 = 94,$
$263 + 2 = 265,$ $\quad 263 \cdot 2 = 526,$
$497 + 2 = 499,$ $\quad 497 \cdot 2 = 994.$

№ 51

Интересные равенства:

$$122^2 + 597^2 = 13^5,$$
$$33802^2 + 8839^2 = 5^{13},$$
$$2^2 + 11^2 = 5^3, \text{ и т.д.}$$

№ 52(А)

Новая «шкатулка» равенств:

$$2 + 10 + 11 + 27 + 28 + 36 = 3 + 6 + 16 + 22 + 32 + 35,$$
$$2^2 + 10^2 + 11^2 + 27^2 + 28^2 + 36^2 = 3^2 + 6^2 + 16^2 + 22^2 + 32^2 + 35^2,$$
$$2^3 + 10^3 + 11^3 + 27^3 + 28^3 + 36^3 = 3^3 + 6^3 + 16^3 + 22^3 + 32^3 + 35^3,$$
$$2^4 + 10^4 + 11^4 + 27^4 + 28^4 + 36^4 = 3^4 + 6^4 + 16^4 + 22^4 + 32^4 + 35^4,$$
$$2^5 + 10^5 + 11^5 + 27^5 + 28^5 + 36^5 = 3^5 + 6^5 + 16^5 + 22^5 + 32^5 + 35^5.$$

№ 53

Один куб равен сумме трех кубов:

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

№ 54(А)

Последовательность девяти квадратов:

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + 25^2 + 26^2 = 48^2,$$
$$4^2 + 10^2 + 16^2 + \ldots + 50^2 + 52^2 = 96^2, \text{ и т.д.}$$

№ 55(А)

Последовательность одиннадцати квадратов:

$$18^2 + 19^2 + 20^2 + \ldots + 27^2 + 28^2 = 77^2$$
$$36^2 + 38^2 + 40^2 + \ldots + 54^2 + 56^2 = 154^2, \text{ и т.д.}$$

№ 56(А)

Куб из суммы семи последовательных чисел:

$$10 + 23 + 36 + 49 + 62 + 75 + 88 = 7^3,$$

$$13 + 25 + 37 + 49 + 61 + 73 + 85 = 7^3,$$
$$16 + 27 + 38 + 49 + 60 + 71 + 82 = 7^3,$$
$$19 + 29 + 39 + 49 + 59 + 69 + 79 = 7^3,$$
$$22 + 31 + 40 + 49 + 58 + 67 + 76 = 7^3,$$
$$25 + 33 + 41 + 49 + 57 + 65 + 73 = 7^3,$$
$$28 + 35 + 42 + 49 + 56 + 63 + 70 = 7^3.$$

№ 57(А)

Учетверенная сумма четырех квадратов:

$$4\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 10^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2,$$
$$4\,(7^2 + 3^2 + 1^2 + 4^2) = 15^2 + 4^2 + 2^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2, \text{ и т.д.}$$

№ 58(А)

Упятеренная сумма пяти квадратов:

$$5\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) =$$
$$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 15^2,$$
$$5\,(5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2) =$$
$$= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + 6^2 + 8^2 + 45^2.$$

Таких равенств можно привести сколько угодно. Случай, когда утроенную сумму 3-х квадратов можно представить в виде 4-х квадратов, рассматривал еще Льюис Керрол в книге «История с узелками» 1973 г, стр. 126.

№ 59(А)

Удевятеренная сумма девяти квадратов:

$$9\,(1^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2) =$$
$$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 +$$
$$+ 3^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 +$$
$$+ 5^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 8^2 +$$
$$+ 9^2 + 9^2 + 9^2 + 11^2 + 11^2 + 13^2 + 66^2.$$

Представляет интерес обобщение задачи на случай n-й суммы из n квадратов.

№ 60(А)

Сумма трех квадратов равна сумме двух:

$1^2 + 2^2 + 6^2 = 4^2 + 5^2$,

$1^2 + 100^2 + 202^2 = 102^2 + 201^2$,

$13^2 + 17^2 + 60^2 = 47^2 + 43^2$,

$19^2 + 20^2 + 78^2 = 58^2 + 59^2$,

$1999^2 + 2000^2 + 7998^2 = 5998^2 + 5999^2$,

$2006^2 + 2007^2 + 8026^2 = 6019^2 + 6020^2$, и т.д.

Аналогичные равенства можно получить по формуле. Какой?

№ 61(А)

Сумма квадратов двух чисел равна сумме квадратов двух других чисел:

$4^2 + 53^2 = 35^2 + 40^2$,

$44^2 + 403^2 = 80^2 + 565^2$,

$6731^2 + 2000^2 = 7019^2 + 200^2$.

$75301^2 + 1100^2 = 75949^2 + 2000^2$.

Процесс можно продолжить сколько угодно. По какой формуле?

№ 62(А)

Один куб равен сумме трех кубов:

$937^3 = 118^3 + 268^3 + 929^3$,

$2096^3 = 42^3 + 980^3 + 2022^3$,

или $1096^3 = 21^3 + 490^3 + 1011^3$, и т.д.

№ 63(А)

Коллекция сумм и кубов.

$87 + 6 + 69 = 27 + 38 + 97 = 162$.

$87^3 + 6^3 + 69^3 = 27^3 + 38^3 + 97^3 = 987228$.

Кроме того, $\dfrac{87^3+6^3+69^3}{87+6+69} = \dfrac{27^3+38^3+97^3}{27+38+97} = 6094$.

$131 + 274 + 428 = 104 + 326 + 403$,

$131^3 + 274^3 + 428^3 = 104^3 + 326^3 + 403^3$, и т.д.

№ 64(А)

Сумма трех кубов равна сумме четырех кубов:

$885^3 + 888^3 + 899^3 = 30^3 + 884^3 + 890^3 + 898^3$ и т.д.

№ 65

Сумма и произведение отличаются только расположением цифр:

$9 + 9 = 18$,	$24 + 3 = 27$,	$47 + 2 = 49$,
$9 \cdot 9 = 81$,	$24 \cdot 3 = 72$,	$47 \cdot 2 = 94$,
$263 + 2 = 265$,	$497 + 2 = 499$,	
$263 \cdot 2 = 526$,	$497 + 2 = 994$.	

№ 66

Произведение двузначных чисел не изменится, если в каждом из сомножителей переставить цифры:

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$,	$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$,
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$,	$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$,
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$,	$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$,
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$,	$36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$,
$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$,	$46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$.

Аналогичным свойством обладают еще 4 пары чисел. Найдите их.

№ 67(А)

Для трехзначных чисел:

$102 \cdot 402 = 201 \cdot 204$,	$102 \cdot 603 = 201 \cdot 306$,
$112 \cdot 422 = 211 \cdot 244$,	$112 \cdot 633 = 211 \cdot 336$,
$122 \cdot 442 = 221 \cdot 244$,	$122 \cdot 633 = 221 \cdot 366$,
$132 \cdot 462 = 231 \cdot 264$,	$132 \cdot 693 = 231 \cdot 396$
$142 \cdot 482 = 241 \cdot 284$,	$103 \cdot 602 = 301 \cdot 206$

Таких равенств всего 60. Интересно найти общее решение.

№ 68

Три пары квадратов последовательных чисел:

$13^2 = 169$, $157^2 = 24649$, $913^2 = 833569$,

$14^2 = 196$, $158^2 = 24964$, $914^2 = 835396$.

Квадраты записаны теми же цифрами, но в измененном порядке.

№ 69

Целая и положительная степень оканчивается на 376 и 625:

$376^2 = 141376$, $376^3 = 53157376$ и т.д.

$625^2 = 390625$, $625^3 = 244140625$ и т.д.

№ 70

Сумма кубов целых чисел равна квадрату их суммы:

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2$,

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 8^3 =$

$= (1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8)^2$,

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = (1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6)^2$.

Проблема нахождения таких чисел связана с задачей французского математика Лиувилля: найти целые числа a, b, c, d, …, сумма кубов которых равна квадрату их суммы:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \ldots = (a + b + c + \ldots)^2.$$

Среди чисел могут быть и равные. Сам математик нашел остроумный способ нахождения таких чисел.

№ 71

Теорема Никомаха.

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1\\
2^3 &= 3 + 5\\
3^3 &= 7 + 9 + 11\\
4^3 &= 13 + 15 + 17 + 19\\
5^3 &= 21 + 23 + 25 + 27 + 29
\end{aligned}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Сумма каждой группы равна кубу номера группы.

№ 72(А)

Равенства вида $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{cd} + \overline{dc}$:

$32 + 23 = 14 + 41$, $52 + 25 = 16 + 61$,

$42 + 24 = 15 + 51$, $43 + 34 = 52 + 25 = 16 + 61$,

$52 + 25 = 34 + 43$, $19 + 91 = 28 + 82 = 37 + 73 = 46 + 64$.

Остальные равенства найдите самостоятельно.

№ 73(А)

Двузначные числа вида $\overline{ab} = a \cdot b + a + b$:

$19 = 1 \cdot 9 + 1 + 9$, $39 = 3 \cdot 9 + 3 + 9$,

$29 = 2 \cdot 9 + 2 + 9$, $49 = 4 \cdot 9 + 4 + 9$, и т.д.

№ 74(А)

Многозначные числа вида $\overline{ab...9}$:

Например:

$469 = 46 \cdot 9 + 46 + 9$,

$13759 = 1375 \cdot 9 + 1375 + 9$,

$1111119 = 111111 \cdot 9 + 111111 + 9$,

$131313139 = 13131313 \cdot 9 + 13131313 + 9$, и т.д.

№ 75(А)

Числа вида $\overline{abb} \cdot \overline{ccd} = \overline{bba} \cdot \overline{dcc}$:

$112 \cdot 422 = 211 \cdot 224$, $223 \cdot 966 = 322 \cdot 669$,

$122 \cdot 442 = 221 \cdot 244$, $233 \cdot 996 = 332 \cdot 699$,

$224 \cdot 844 = 422 \cdot 448$, $334 \cdot 866 = 433 \cdot 668$,

$244 \cdot 884 = 442 \cdot 488$, $344 \cdot 886 = 443 \cdot 688$.

Всего таких равенств 18. Попробуйте найти.

№ 76(А)

Числа вида $\overline{aac} \cdot \overline{bb} = \overline{bbb} \cdot \overline{aa}$:

$111 \cdot 22 = 222 \cdot 11$, $222 \cdot 33 = 333 \cdot 22$,

$111 \cdot 33 = 333 \cdot 11$, $222 \cdot 44 = 444 \cdot 22$,

$111 \cdot 44 = 444 \cdot 11$, $222 \cdot 55 = 555 \cdot 22$, и т.д.

№ 77(А)

Числа вида $\overline{ab} - \overline{cd} = a + b + c + d$:

$30 - 18 = 3 + 0 + 1 + 8$, $66 - 45 = 6 + 6 + 4 + 5$,
$31 - 18 = 3 + 1 + 1 + 8$, $79 - 54 = 7 + 9 + 5 + 4$,
$41 - 27 = 4 + 1 + 2 + 7$, $83 - 63 = 8 + 3 + 6 + 3$,
$53 - 36 = 5 + 3 + 3 + 6$, $95 - 72 = 9 + 5 + 7 + 2$, и т.д.

№ 78(А)

Равенство $a \cdot b^3 = a^3 : b$.

Например: $4 \cdot 2^3 = 4^3 : 2$,
$9 \cdot 3^3 = 9^3 : 3$.

Есть ли еще подобные равенства?

№ 79(А)

Равенство $\overline{ab} - c = a \cdot b \cdot c$.

Например: $18 - 2 = 1 \cdot 8 \cdot 2$,
$26 - 2 = 2 \cdot 6 \cdot 2$,
$12 - 4 = 1 \cdot 2 \cdot 4$.

Найдите еще такие равенства.

№ 80(А)

Равенство $\overline{abc} = \overline{ab}^2 + c$.

$100 = 10^2 + 0$, $103 = 10^2 + 3$,
$101 = 10^2 + 1$, $104 = 10^2 + 4$,
$102 = 10^2 + 2$, $105 = 10^2 + 5$, и т.д.

№ 81(А)

Равенство $\overline{ab} = a^2 + a + b$.

$90 = 9^2 + 9 + 0$, $92 = 9^2 + 9 + 2$,
$91 = 9^2 + 9 + 1$, $93 = 9^2 + 9 + 3$, и т.д.

№ 82(А)

Равенство $\overline{ab} = a + b + b^2$.

Например: $13 = 1 + 3 + 3^2$.

Существует ли еще число подобного вида?

№ 83 (А)

Равенство $\overline{ab} = a^3 + a + b$.

Например: $30 = 3^3 + 3 + 0$,
$31 = 3^3 + 3 + 1$,
$32 = 3^3 + 3 + 2$, и т.д.

№ 84 (А)

Равенство $\overline{aa} = a + a + a^3$.

Например: $33 = 3 + 3 + 3^3$.

Сколько таких чисел?

№ 85 (А)

Равенство $\overline{ab} = a^2 + b^2 + b$:

$13 = 1^2 + 3^2 + 3$, $24 = 2^2 + 4^2 + 4$,
$55 = 5^2 + 5^2 + 5$, $84 = 8^2 + 4^2 + 4$,
$93 = 9^2 + 3^2 + 3$.

№ 86 (А)

Равенство $\overline{ab} = a \cdot b + b^2$:

$24 = 2 \cdot 4 + 4^2$; $45 = 4 \cdot 5 + 5^5$.

№ 87 (А)

Равенство $\overline{abc} = \overline{ab}^2 - c^2$.

$147 = 14^2 - 7^2$ — единственное равенство.

№ 88 (А)

Равенство $\overline{ab} = a^2 + b^2 - (a + b)$:

$36 = 3^2 + 6^2 - (3 + 6)$.

Найдите еще одно число, обладающее подобным свойством.

№ 89

Квадраты двухзначных чисел и их перестановки:

$12^2 = 144$, $13^2 = 169$,
$21^2 = 441$, $31^2 = 961$.

Как видим, сами числа и их квадраты отличаются лишь перестановкой цифр.

№ 90(А)

Квадраты трехзначных чисел и их перестановки:

$102^2 = 10404$, $103^2 = 10609$, $112^2 = 12544$,
$201^2 = 40401$, $301^2 = 90601$, $211^2 = 44521$,
$113^2 = 12769$, $122^2 = 14484$
$311^2 = 96721$, $221^2 = 48841$.

№ 91

Равные дроби:

$$\frac{13}{77} = \frac{1313}{7777} = \frac{131313}{777777}.$$

На чем основано равенство этих дробей?

№ 92

Особое число.

13452 — искомое число; $13 \cdot 4 = 52$.

Как видим, число образовано из пяти последовательных цифр, так что число 13, умноженное на среднюю цифру 4, дает число, образованное последними двумя цифрами, т.е. 52.

Таким же свойством обладает число 947658, так как $94 \cdot 7 = 658$.

№ 93

Интересные суммы.

$$\begin{array}{r} 173 \\ +\quad 4 \\ \hline 177 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85 \\ +\ 92 \\ \hline 177 \end{array}$$

Здесь использованы цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 двумя группами по 4 цифры так, что суммы оказались равны между собой.

№ 94

Красивое равенство:

$$81 = (8 + 1)^2.$$

№ 95

Новые суммы и произведения:

$4997 + 2 = 4999,$ $\quad 2963 + 2 = 2965,$

$4997 \cdot 2 = 9994,$ $\quad 2963 \cdot 2 = 5926,$

$49997 + 2 = 49999,$ $\quad 29963 + 2 = 29965,$

$49997 \cdot 2 = 99994,$ $\quad 29963 \cdot 2 = 59926.$

№ 96

Квадрат-палиндром:

$$836^2 = 698896.$$

Полученное число — четное. Его можно читать как слева направо, так и наоборот.

Среди всех квадратов, имеющих четное число цифр, палиндромический квадрат — наименьший.

№ 97

Тройки и семерки. Число 3333377733 — наименьшее, которое делится на 3 и на 7. Кроме того, сумма цифр

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3 = 42,$$

также делится на 3 и на 7.

№ 98

Извлечение кубического корня:

$\sqrt[3]{5832} = 18,$ $\quad 5 + 8 + 3 + 2 = 18;$

$\sqrt[3]{17576} = 26,$ $\quad 1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26;$

$\sqrt[3]{19683} = 27,$ $\quad 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27.$

Сумма цифр каждого из них, равная соответственно 18, 26 и 27, совпадает с соответствующим кубическим корнем.

№ 99

Трехзначное число, делящееся на квадрат суммы своих цифр:

$$\frac{162}{(1+6+2)^2}=2; \quad \frac{243}{(2+4+3)^2}=3;$$

$$\frac{324}{(3+2+4)^2}=4; \quad \frac{392}{(3+9+2)^2}=2;$$

$$\frac{405}{(4+0+5)^2}=5; \quad \frac{512}{(5+1+2)^2}=8.$$

$$\frac{605}{(6+0+5)^2}=5; \quad \frac{648}{(6+4+8)^2}=2;$$

$$\frac{810}{(8+1+0)^2}=10.$$

Есть еще одно трехзначное число, обладающее указанным свойством.

№ 100

Цифры и кубы:

$237^2 = 56169$, где $56 + 69 = 125 = 5^3$;

$251^2 = 63001$, где $63 + 01 = 64 = 4^3$;

$152^2 = 23104$, где $23 + 04 = 27 = 3^3$;

№ 101

Удивительное равенство:

$$989010989 \cdot \underline{123456789} = 122100120\underline{987654321}.$$

№ 102

Наибольший и наименьший квадраты:

$32043^2 = 1026753849$ — наименьший квадрат.

$99066^2 = 9814072356$ — наибольший квадрат.

Каждый из квадратов содержит все 10 цифр от 0 до 9, причем каждая цифра лишь по одному разу.

№ 103

Цифровые квадраты:

$$567^2 = 321489;$$
$$854^2 = 729316.$$

Каждое число вместе со своим квадратом содержит все натуральные числа от 1 до 9 включительно.

№ 104

Используя три из четырех арифметических действий:

$7 + 1 = 8$; $9 - 6 = 3$; $4 \cdot 5 = 20$.

Использованы все 10 цифр.

№ 105

Равные дроби:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}; \qquad \frac{3}{6} = \frac{7}{14} = \frac{29}{58};$$

$$\frac{3}{6} = \frac{9}{18} = \frac{27}{54}; \qquad \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}.$$

В каждом случае использованы все цифры от 1 до 9 включительно.

№ 106

Сумма простых чисел:

$$\begin{array}{r} 61 \\ 283 \\ +\ 47 \\ 59 \\ \hline 450 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ 61 \\ 89 \\ +\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ \hline 207 \end{array}$$

При сложении использованы лишь простые числа. Каждая из 9 цифр использована 1 раз

№ 107

Числа вида $\overline{abc} = a^3 + b^3 + c^3$:

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3;\ 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3;$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3.$$

Есть еще одно трехзначное число, равное сумме кубов своих цифр. Найдите его.

№ 108

Число вида $\overline{abc} = (a + b + c)^3$:

$512 = (5 + 1 + 2)^3$ — единственное трехзначное число.

№ 109

Квадраты и кубы:

$$10^2 - 6^2 = 4^3; \qquad 10^3 - 6^3 = 28^2.$$

Разность квадратов двух чисел равна кубу, а разность кубов — квадрату. Указанные числа являются наименьшими.

№ 110

Точные квадраты. Четыре числа, сумма каждой пары которых и сумма которых представляет собой точные квадраты:

$$10430 + 3970 = 120^2; \qquad 3970 + 2114 = 78^2;$$
$$10430 + 2114 = 112^2; \qquad 3970 + 386 = 66^2;$$
$$10430 + 386 = 104^2; \qquad 2114 + 386 = 50^2;$$
$$10430 + 3970 + 2114 + 386 = 16900 = 130^2.$$

№ 111

Пять кубов:

$$25^3 + 26^3 + 27^3 + 28^3 + 29^3 = 315^2.$$

№ 112

Двенадцать кубов:

$$14^3 + 15^3 + 16^3 + \ldots + 23^3 + 24^3 + 25^3 = 312^2.$$

№ 113

Два куба:

$7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $512 - 343 = 169 = 13^2$.

Значит, $8^3 - 7^3 = 13^2$.

№ 114

Разность квадратов:

$$617284^2 - 617283^2 = 1234567.$$

№ 115

Разность кубов:

$$642^3 - 641^3 = 1234567.$$

№ 116

Арифметическая прогрессия:

$482 + 3362 = 62^2$, $3362 + 6242 = 98^2$.

$482 + 6242 = 82^2$,

Числа 482, 3362, 6242 образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2880$.

№ 117

Квадраты и кубы:

$625^2 + 1250^2 = 125^3$; $625^3 + 1250^3 = 46875^2$.

№ 118

Геометрическая прогрессия:

$1 + 7 + 49 + 343 = 20^2$; $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 11^2$.

№ 119

Представить **число 222 с помощью цифр от 1 до 9** включительно, используя знаки « + » и «–» (без скобок).

$$123 + 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 222,$$
$$1 + 234 + 5 + 6 - 7 - 8 - 9 = 222,$$
$$1 + 234 + 56 - 78 + 9 = 222.$$

Все числа расположены последовательно.

№ 120(А)

Число 100 наименьшим количеством разных цифр (используя знаки « + », без скобок).

$$1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100,$$
$$1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100.$$

№ 121(А)

Удивительные равенства:

$$(1 + 9 + 8 + 9)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 9 = 9^2;$$
$$(1 + 9 + 8 + 8)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 = 10^2;$$
$$(1 + 9 + 8 + 7)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 11^2;$$
$$(1 + 9 + 8 + 6)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 = 12^2;$$
$$(1 + 9 + 8 + 5)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 = 13^2;$$
$$(1 + 9 + 8 + 4)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 = 14^2;$$
$$(1 + 9 + 8 + 3)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3 = 15^2;$$
$$(1 + 9 + 8 + 2)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2 = 16^2;$$
$$(1 + 9 + 8 + 1)^2 - 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1 = 17^2.$$

Замечание 1. Понятно, что условию задачи удовлетворяют также перестановки чисел.

Замечание 2. Существуют ли еще аналогичные числа, состоящие из большего количества последовательных четырехзначных чисел. Это уже другая (более сложная) задача.

Замечание 3. Среди трехзначных чисел вышеуказанным свойством обладают числа от 881 до 889.

Литература

1. *Балаян Э.Н.* Математика. Сам себе репетитор. Задачи повышенной сложности. — Ростов н/Д, 2004.
2. *Балаян Э.Н.* Репетитор по математике для поступающих в вузы. — 5-е изд. — Ростов н/Д, 2006.
3. *Бартенев Ф.А.* Нестандартные задачи по алгебре. — М.: Просвещение, 1976.
4. *Васильев Н.Б. и др.* Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1981.
5. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка. — М.: Издательство технико-теоретической литературы, 1957.
6. *Лоповок Л.М.* 1000 проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995.
7. *Мазаник А.А.* Реши сам. Ч. III. — Минск: Народная Асвета, 1972.
8. *Минаева С.С.* Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике. — М.; Просвещение, 1983.
9. *Рукшин С.Е.* Математические соревнования в Ленинграде. — СПб.–Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2000.

Содержание

Издательство Феникс

Отдел оптовых продаж:

344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80
Контактные телефоны: (863) 261-89-53, 261-89-54,
261-89-55, 261-89-56, 261-89-57, **факс:** 261-89-58

Начальник отдела — РОДИОНОВА Татьяна Александровна;
e-mail: torg152@phoenixrostov.ru

Заместитель начальника отдела — МЕЗИНОВ Антон Николаевич
e-mail: torg151@phoenixrostov.ru

Менеджер по продажам на территории Москвы, Центра европейской части России и республики Казахстан
ЧЕРМАНТЕЕВА
Татьяна Степановна
e-mail: torg155@aaanet.ru

Менеджер по продажам на территории Урала и Северо-Запада
ХОМУТЕЦКАЯ
Екатерина Владимировна
e-mail: torg153@aaanet.ru

Менеджер по продажам
ФРАНК Татьяна Викторовна
e-mail: sibir@aaanet.ru

Менеджер по продажам на территории ближнего и дальнего зарубежья
ЯРУТА Игорь Игоревич
e-mail: torg150@aaanet.ru

Менеджер по продажам
ФЕДОТОВА Ирина Петровна
e-mail: torg@aaanet.ru

Менеджер по продажам
ЕРЕМЕНКО Алла Сергеевна
e-mail: torg180@aaanet.ru

Менеджер по продажам
БЕСКРОВНЫЙ
Виктор Александрович
e-mail: ural@aaanet.ru

• •

Вы можете получить книги издательства «Феникс» по почте, сделав заказ:

344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80
ООО «Феникс», «Книга — почтой», **Лоза Игорю Викторовичу**
Тел.: 8-909-440-64-21, **e-mail:** tvoyakniga@mail.ru

Издательство Феникс

Региональные представительства:

г. МОСКВА
Москва, 17-й проезд
Марьиной рощи, д. 1,
метро «Тимирязевская»
Тел.: (495) 618-03-34
e-mail: fenix-m@yandex.ru
Директор:
МОИСЕЕНКО Сергей Николаевич

Москва, шоссе Фрезер, 17,
район метро «Авиамоторная»
Тел.: (495) 517-32-95
Тел./факс: (495) 789-83-17
e-mail: mosfen@pochta.ru
mosfen@bk.ru
Директор:
МЯЧИН Виталий Васильевич

Торговый Дом «КноРус»
Москва, ул. Б. Переяславская, 46,
метро «Рижская», «Проспект мира»
Тел.: (495) 680-02-07, 680-72-54,
680-91-06, 680-92-13
e-mail: phoenix@knorus.ru

г. САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
198096, г. Санкт-Петербург,
ул. Кронштадтская, 11, офис 17
Тел.: (812) 335-34-84
e-mail: fnx.spb@mail.ru
Директор:
СТРЕЛЬНИКОВА Оксана Борисовна

г. ЕКАТЕРИНБУРГ
620085, г. Екатеринбург,
ул. Сухоложская, д. 8
Тел.: (343) 297-25-75
e-mail: fenixkniga@mail.ru
Директор:
КУТЯНИНА Олеся Сергеевна

г. ЧЕЛЯБИНСК —
ООО «Интер-сервис ЛТД»,
454007, г. Челябинск,
ул. Артиллерийская, д. 124
Тел.: (351) 247-74-13
e-mail: zakup@intser.ru
Менеджер: ШАРМАНОВА Любовь

г. НОВОСИБИРСК —
ООО «ТОП-Книга»
г. Новосибирск, ул. Арбузова, 1/1
Тел.: (3832) 36-10-28, доб. 1438
e-mail: phoenix@top-kniga.ru
Менеджер:
МИХАЙЛОВА Наталья Валерьевна

УКРАИНА — ООО ИКЦ «Кредо»
г. Донецк, ул. Куйбышева, 131
Тел.: +38 (8062) 345-63-08,
348-37-91, 348-37-92, 345-36-52,
339-60-85, 348-37-86
e-mail: moiseenko@skif.net
МОИСЕЕНКО Владимир Вячеславович

г. НИЖНИЙ НОВГОРОД
(Верхнее Поволжье)
Нижний Новгород,
Мещерский бульвар, 5, кв. 238
Тел./факс: (8312) 77-48-70
e-mail: fenixn@rambler.ru
Директор:
КОЦУБА Вячеслав Вячеславович

г. САМАРА (Нижнее Поволжье)
Самара, ул. Товарная, 7Е
(территория базы «Учебник»)
Тел.: (846) 951-24-76
e-mail: fenixma@mail.ru
Директор:
МИТРОХИН Андрей Михайлович

Серия Библиотека учителя

Балаян Эдуард Николаевич

1001 ОЛИМПИАДНАЯ И ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

3-е издание

Ответственный за выпуск	*Кузнецов В.П.*
Технический редактор	*Логвинова Г.А.*
Корректор	*Петренко Н.Г.*
Компьютерная верстка:	*Машир Т.Г.*
Дизайн обложки:	*Тимофеева Е.В.*

Сдано в набор 15.09.2008 г. Подписано в печать 09.10.2008 г.
Формат 84x108 $^1/_{32}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс.
Тираж 3000 экз. Заказ 825.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону,
пер. Халтуринский, 80

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга».
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.
Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.