Образовательный центр «Сириус»

Январская математическая смена

Предварительный тур. 19.11.2015

7–8 класс. Решения

1. *Расставьте в клетках квадрата 3×3 числа от 1 до 9 так, чтобы каждое число было использовано ровно один раз, и произведение в соседних по стороне клетках было четным.*

Решение. Например, можно расставить числа следующим образом:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2. *На продуктовом складе хранятся картошка, редиска, лук, горох, петрушка, свекла, молоко и огурцы. Повар составляет рецепты супов. В каждый рецепт он включает 6 ингредиентов, причем молоко и огурцы одновременно включать нельзя. Сколько рецептов, различающихся по составу требуемых ингредиентов, может составить повар?*

Ответ 13.

Решение. В каждом супе должны не использоваться два ингредиента, причем один из них — молоко или огурцы. Существует одна пара молоко+огурцы и еще $2 \cdot 6 = 12$ пар вида (молоко или огурцы)+(один из прочих ингредиентов).

3. *В олимпиаде участвовали 211 школьников 8 и 9 классов. Им было выдано 1084 листа бумаги, причем каждый девятиклассник получил на два листа больше, чем каждый восьмиклассник. Сколько было восьмиклассников?*

Решение. Допустим, каждый восьмиклассник получил x листов, а каждый девятиклассник $x+2$. Тогда $211x \leqslant 1084 \leqslant 211(x+2)$, откуда $4 \leqslant x \leqslant 5$. Если $x = 5$, то все школьники получили по нечетному числу листов, поэтому общее число листов тоже нечетно. Следовательно, $x = 4$. Тогда число девятиклассников равно $\frac{1084-4\cdot 211}{2} = 120$, а число восьмиклассников 91.

4. *Существуют ли такие три натуральных числа a, b и c большие 10, сумма которых является четырехзначной и при этом $a^2 - 1$ делится на b, $b^2 - 4$ делится на c, и $c^2 - 9$ делится на a?*

Ответ: да, существуют.

Решение. Пусть $a = n + 1$, $b = n$, $c = n - 2$. Тогда $a^2 - 1 = n(n + 2)$ делится на $n = b$; $b^2 - 4 = (n - 2)(n + 2)$ делится на $n - 2 = c$; $c^2 - 9 = (n + 1)(n - 5)$ делится на $n + 1 = a$.

Возьмем в качестве n любое число такое, что $3n - 1$ четырехзначное. Например, подойдут числа $a = 1001$, $b = 1000$, $c = 998$.

5. *На боковых сторонах AC и BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. Точка F пересечения биссектрис углов DEB и ADE лежит на основании AB. Докажите, что F — середина AB.*

Решение. Так как F лежит на биссектрисе DEB, то расстояние от точки F до прямых DE и BE одинаково. Аналогично расстояния от F до AD и от F до DE одинаковы. Тогда расстояния от F до прямых AD и BE одинаковы, то есть точка F лежит на биссектрисе угла ACB. Вспомним теперь, что треугольник ABC равнобедренный, а значит, медиана и биссектриса совпадают, а тогда точка F лежит на медиане, то есть является серединой основания AB.

6. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 5 \\ \dfrac{xz}{x+z} = 7 \\ \dfrac{yz}{y+z} = 9 \end{cases}$

Ответ:

Решение. Так как $\dfrac{xy}{x+y} = 5$, то $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{5}$, откуда $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$.

Аналогично $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{7}$ и $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{9}$.

Следовательно $\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{73}{315}$, $x = \dfrac{630}{73} = 8\dfrac{46}{73}$.

Аналогично $y = \dfrac{630}{53} = 11\dfrac{47}{53}$, $z = \dfrac{630}{17} = 37\dfrac{1}{17}$

Образовательный центр «Сириус»

Январская математическая смена

Предварительный тур. 19.11.2015

9 класс. Решения

1. *Расставьте в клетках квадрата* 3×3 *числа 1, 2, 3, 6, 7, 9, 12, 13 и 14 по одному разу каждое так, чтобы произведение чисел в клетках соседних по стороне делилось на 3.*

Решение. Например, можно расставить числа следующим образом:

1	3	2
6	7	9
13	12	14

2. *В олимпиаде участвовали 211 школьников 8 и 9 классов. Им было выдано 1084 листа бумаги, причем каждый девятиклассник получил на два листа больше, чем каждый восьмиклассник. Если бы восьмиклассников было на одного меньше, то все восьмиклассники вместе получили бы ровно вдвое меньше бумаги, чем все девятиклассники. Сколько было восьмиклассников?*

Решение. *Первый способ.*

Обозначим за x количество девятиклассников, а за y — количество выданных каждому восьмикласснику листов. Тогда восьмиклассников было $211 - x$, а каждый девятиклассник получил по $y + 2$ листа бумаги. Из условия составим систему

$$\begin{cases} x(y+2) + (211-x)y = 1084 \\ x(y+2) = 2(210-x)y \end{cases}$$

Из первого уравнения $2x+211y = 1084$. Тогда из второго $xy+2x = 420y-2xy$, $6xy+4x = 840y$, $(3y+2)(1084-211y) = 840y$, $633y^2 - 1990y - 2168 = 0, y_1 = 4, y_2 < 0$.

Итак, $y = 4$, тогда $x = 120$ и восьмиклассников было 91.

Второй способ. См. задачу 3 для 7–8 классов. Необходимо также проверить условие $4 \cdot 90 \cdot 2 = 6 \cdot 120$.

3. В остроугольном треугольнике ABC высота из вершины B и биссектриса из вершины C пересекаются в точке D. Пусть E — точка, симметричная точке D относительно прямой AC. Известно, что точки A, B, C и E принадлежат одной окружности. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение. Так как точки D и E симметричны относительно прямой AB, то $\angle ABD = \angle ABE$. Так как точки A, B, C и E лежат на одной окружности, то $\angle ABE = \angle ACE$ как опирающиеся на одну дугу. Таким образом, углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ равны. В треугольнике ABC прямая BD содержит высоту из вершины B, следовательно, $\angle BAC + \angle ABD = 90°$, тогда $\angle BAC + \angle ACD =$

90°, откуда прямые CD и AB перпендикулярны. Итак, мы получили, что биссектриса угла C перпендикулярна стороне AB, откуда треугольник ABC равнобедренный.

4. *Какие значения может принимать сумма всех корней уравнения*

$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = a(x^2 - 2x + 1)?$$

Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Решение.

$x^3 - x^2 + 3x - 3 = a(x^2 - 2x + 1)$

$(x-1)(x^2+3) = a(x-1)^2$

$(x-1)(x^2 - ax + a + 3) = 0$

Рассмотрим дискриминант квадратного трехчлена во второй скобке. Он равен $a^2 - 4a - 12 = (a+2)(a-6)$.

Случай 1. $a \in (-2; 6)$. Тогда единственным корнем уравнения будет $x = 1$ и сумма корней равна 1.

Случай 2. $a = -2$ или $a = 6$. Тогда сумма корней равна, соответственно $1 + (-1) = 0$ или $1 + 3 = 4$.

Случай 3. $a \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$. Тогда сумма корней уравнения $x^2 - ax + a + 3 = 0$ равна a, а общая сумма корней равна $a + 1 \in (-\infty; -1) \cup (7; \infty)$.

Заметим, что $x = 1$ никогда не является корнем $x^2 - ax + a + 3 = 0$, поскольку $1 - a + a + 3 = 4 \neq 0$.

Ответ $(-\infty; -1) \cup (7; \infty) \cup \{0, 1, 4\}$

5. *Известно, что* $2^{2013} < 5^{867} < 2^{2014}$. *Сколько существует натуральных* $y \leqslant 2012$, *для каждого из которых найдется натуральное* x *такое, что выполняются неравенства* $5^x < 2^y$ *и* $2^{y+2} < 5^{x+1}$*?*

Ответ 279.

Решение. Рассмотрим последовательность чисел $1, 5^1, 5^2, \ldots, 5^{867}$. Между любыми двумя соседними членами этой последовательности найдется либо две, либо три степени двойки.

В самом деле, между 1 и 5 находятся 2 и 4. Для других промежутков - пусть 2^n - наибольшая степень двойки с натуральным показателем, для которой $2^n < 5^x$. Тогда $2^{n+1} > 5^x$ и $2^{n+2} = 4 \cdot 2^n < 4 \cdot 5^x < 5^{x+1}$, поэтому две степени двойки там найдутся. С другой стороны, $2^{n+4} = 8 \cdot 2^{n+1} > 8 \cdot 5^x > 5^{x+1}$, поэтому четыре степени двойки в один промежуток не попадут.

Обозначим за a количество промежутков, в которых по две степени двойки, а за b - количество промежутков, в которых по три степени двойки. Тогда получаем, что $a + b = 867$ и $2a + 3b = 2013$, откуда $b = 279$. Очевидно это и есть нужное нам число.

6. Сумма четырех натуральных чисел равна 137. Какое наименьшее значение может принимать их наименьшее общее кратное?

Ответ: 54. Пример $137 = 54 + 54 + 27 + 2$

Решение. Допустим, $137 = a + b + c + d$, $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Тогда $4a \geqslant 137$, $a \geqslant 35$. Если наименьшее общее кратное не равно a, то оно как минимум $2a \geqslant 70$.

Итак, оно равно a, а числа b, c, d - делители a.

Если $b < a$, то b, c, $d \leqslant \frac{a}{2}$, $a + \frac{3a}{2} \geqslant 137$, $a \geqslant 55$. Поэтому имеет смысл только случай, когда $b = a$.

Очевидно, что НОД (c, d)=1, поскольку НОК (a, b, c, d) делится на него, но 137 - простое.

Если $c = a$, то $d = 1$, но уравнение $a + a + a + 1 = 137$ не имеет целых корней.

Тогда $c \leqslant \frac{a}{2}$, $cd \leqslant a$, поэтому $c + d \leqslant c + \frac{a}{c} \leqslant \frac{a}{2} + 2$ (при фиксированном произведении сумма двух чисел возрастает, если они максимально удалены друг от друга). Тогда $a + b + c \leqslant \frac{5a}{2} + 2$, что и приводит к ответу, данному вначале.