

Образовательный центр «Сириус»

Январская математическая смена

Предварительный тур. 19.11.2015

9 класс

1. Расставьте в клетках квадрата 3×3 числа 1, 2, 3, 6, 7, 9, 12, 13 и 14 по одному разу каждое так, чтобы произведение чисел в клетках соседних по стороне делилось на 3.

2. В олимпиаде участвовали 211 школьников 8 и 9 классов. Им было выдано 1084 листа бумаги, причем каждый девятиклассник получил на два листа больше, чем каждый восьмиклассник. Если бы восьмиклассников было на одного меньше, то все восьмиклассники вместе получили бы ровно вдвое меньше бумаги, чем все девятиклассники. Сколько было восьмиклассников?

3. В остроугольном треугольнике ABC высота из вершины B и биссектриса из вершины C пересекаются в точке D . Пусть E — точка, симметричная точке D относительно прямой AC . Известно, что точки A , B , C и E принадлежат одной окружности. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

4. Какие значения может принимать сумма всех корней уравнения

$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = a(x^2 - 2x + 1)?$$

Укажите все варианты и докажите, что других нет.

5. Известно, что $2^{2013} < 5^{867} < 2^{2014}$. Сколько существует натуральных $y \leq 2012$, для каждого из которых найдется натуральное x такое, что выполняются неравенства $5^x < 2^y$ и $2^{y+2} < 5^{x+1}$?

6. Сумма четырех натуральных чисел равна 137. Какое наименьшее значение может принимать их наименьшее общее кратное?