Образовательный центр «Сириус»
Январская математическая смена
Отборочный тур. 6.12.2015
7 класс

1. *На столе лежат фрукты. Известно, что яблоко и мандарин вместе весят 167 граммов, мандарин и груша весят вместе 176 граммов, мандарин и апельсин весят вместе 200 граммов, а груша и яблоко весят вместе 159 граммов. Сколько весят вместе взятые мандарин, апельсин и груша?*

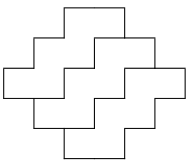
Ответ: 284. **Решение.** Так как $2 \cdot$груша $=$ мандарин$+$груша$+$груша$+$яблоко$-$(мандарин$+$яблоко) $= 176 + 159 - 167 = 84 \cdot 2$. Откуда, груша весит 84 грамма, следовательно мандарин, апельсин и груша вместе весят 284 грамма.

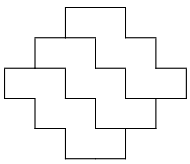
2. *Придумайте три различных натуральных числа a, b и c таких, что их сумма равна 2015, при этом a делится на b без остатка, а b делится на c без остатка.*

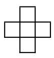
Решение. Например, подходят числа 2000, 10 и 5, или числа 2012, 2 и 1.

3. *Будем называть фигуру вида*  *S-лесенкой, а фигуру вида*  *Z-лесенкой. Эти фигуры отражать и поворачивать запрещено. Существует ли такая фигура, что ее можно разрезать как на три S–лесенки, так и на три Z-лесенки?*

Ответ: Да, можно. **Пример:**





4. *В клетках квадрата 4×4 расставлены числа так, что в каждом из пяти квадратов 2×2, расположенных в центре квадрата 4×4 и в его углах, сумма чисел равна 14, а в каждом пятиклеточном «кресте»*  *сумма чисел равна 15. Найдите сумму чисел в четырёх угловых клетках исходного квадрата.*

Ответ: 24. **Решение.** В квадрате 4×4 крест из пяти клеток можно разместить четырьмя способами. Взяв все эти четыре креста, увидим, что каждая из четырёх центральных клеток квадрата покрыта тремя из них, а каждая из боковых, но не угловых клеток квадрата покрыта одним из них. Поэтому сумма всех чисел, стоящих не в угловых клетках квадрата, равна $4 \cdot 15 - 2 \cdot 14 = 32$. С другой стороны, квадрат 4×4 разбивается на четыре угловых квадрата 2×2, и потому сумма всех чисел в нём равна $4 \times 14 = 56$. Значит, сумма чисел в его угловых клетках равна $56 - 32 = 24$.

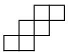
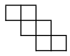
5. *2014 монет выложены по кругу гербом вверх. Разрешается перевернуть четыре монеты, либо лежащие подряд, либо занимающие 4 из пяти последовательных мест, кроме среднего. Можно ли с помощью таких операций повернуть все монеты решкой вверх?*

Ответ: нельзя. Решение. Будем рассматривать количество монет лежащих на нечетных местах гербом вверх. Легко заметить, что при каждой операции мы переворачиваем ровно две монеты на нечетных местах. Откуда, лекго видеть, что количество монет лежащих гербом вверх всегда будет нечетно, следовательно никогда все монеты не будут лежать рещкой вверх.

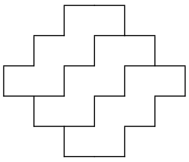
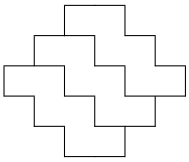
6. *Кощей Бессмертный написал на доске два разных натуральных числа. Каждую минуту он дописывает на доску половину суммы двух чисел, написанных на доске последними (например, если написано число 16, а потом 8, то выписаны будут числа: 16, 8, 12, 10, 11, …). Докажите, что рано или поздно на доске появится нецелое число.*

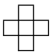
Решение. Заметим, что разность между соседними числами уменьшается в два раза за один шаг, следовательно, рано или поздно она перестанет быть целой. А тогда, числа не могут быть всегда целыми.

Образовательный центр «Сириус»
Январская математическая смена
Отборочный тур. 6.12.2015
8–9 класс

1. *Будем называть фигуру вида*  *S-лесенкой, а фигуру вида*  *Z-лесенкой. Эти фигуры отражать и поворачивать запрещено. Существует ли такая фигура, что ее можно разрезать как на три S–лесенки, так и на три Z-лесенки?*

Ответ: Да, можно. **Пример:**

2. *В клетках квадрата 4×4 расставлены числа так, что в каждом из пяти квадратов 2×2, расположенных в центре квадрата 4×4 и в его углах, сумма чисел равна 9, а в каждом пятиклеточном «кресте»*  *сумма чисел равна 10. Найдите сумму чисел в четырёх угловых клетках исходного квадрата.*

Ответ: 14. **Решение.** В квадрате 4×4 крест из пяти клеток можно разместить четырьмя способами. Взяв все эти четыре креста, увидим, что каждая из четырёх центральных клеток квадрата покрыта тремя из них, а каждая из боковых, но не угловых клеток квадрата покрыта одним из них. Поэтому сумма всех чисел, стоящих не в угловых клетках квадрата, равна $4 \cdot 10 - 2 \cdot 9 = 22$. С другой стороны, квадрат 4×4 разбивается на четыре угловых квадрата 2×2, и потому сумма всех чисел в нём равна $4 \times 9 = 36$. Значит, сумма чисел в его угловых клетках равна $36 - 22 = 14$.

3. *Числа x, y и z удовлетворяют условиям $xy + yz + zx > 0$ и $x + y > 0$. Докажите, что $y + z > 0$.*

Решение. Заметим, что $(x+y)(y+z) = y^2+xy+yz+zx > y^2 \geqslant 0$, следовательно $(x+y)(y+z) > 0$, откуда $y + z > 0$.

4. *Точки P, Q, R и S — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Треугольники AQR и CSP — равносторонние. Докажите, что $ABCD$ — ромб.*

Решение. Как известно, $PQRS$ — параллелограмм. При симметрии относительно его центра отрезки QR и SP переходят друг в друга. Значит, друг в друга переходят и треугольники AQR и CSP, отрезки CQ и AS и отрезки CR и AP. Но тогда друг в друга переходят и вершины B и D, откуда следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Так как диагональ AC параллелограмма делит отрезок PS пополам, она является медианой и высотой в равностороннем треугольнике CPS. Поскольку $PS \parallel BD$, диагонали параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны, то есть он — ромб.

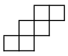
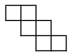
5. *В двух огромных корзинах лежат камни: в первой — 10000, во второй — 20000 камней. Петя и Вася играют в игру (ходят по очереди, начинает Петя). За один ход каждому из мальчиков разрешается либо взять сколько угодно камней из любой (одной!) корзины; либо же взять из обеих корзин, но так, чтобы число взятых за этот ход камней делилось на 2015. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто из мальчиков может выиграть как бы ни старался его соперник?*

Ответ. Петя. **Решение.** Заметим, что $10000+20000 = 14 \times 2015+1790$. Пусть первым ходом Петя возьмёт 14×2015 камней так, чтобы в обеих корзинах осталось по $1790/2 = 895$ камней. В дальнейшем Вася на каждом ходу сможет брать камни только из одной корзины, и для победы Пете достаточно будет достаточно каждым своим ходом уравнивать число камней в корзинах: рано или поздно после очередного хода Васи одна из корзин опустеет, тогда Петя возьмёт все камни из другой корзины и выиграет.

6. *Целые числа x и y таковы, что $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y$ и $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y$ делятся на 17. Докажите, что $xy - 12x + 15y$ также делится на 17.*

Решение. Заметим, что $x^2-3xy+2y^2+x-y=(x-y)(x-2y+1)$, то есть, либо $x-y$ делится на 17, либо $x-(2y-1)$ делится на 17. В первом случае получим $x^2-2xy+y^2-5x+7y-2x$ делится на 17, то есть x и y делятся на 17, откуда $xy-12x+15y$ делится на 17. Во втором случае $x^2-2xy+y^2-5x+7y$ дает такой же остаток от деления на 17 как и $(2y-1)2-2(2y-1)y+y^2-5(2y-1)+7y$, откуда после преобразований получаем, что y^2-5y+6 делится на 17. Также, $xy-12x+15y$ дает при делении на 17 остаток как $2y^2-10y+12=2(y^2-5y+6)$. Значит, и в этом случае $xy-12x+15y$ делится на 17.

Образовательный центр «Сириус»
Январская математическая смена
Отборочный тур. 6.12.2015
10 класс

1. *Будем называть фигуру вида*  *S-лесенкой, а фигуру вида*  *Z-лесенкой. Эти фигуры отражать и поворачивать запрещено. Существует ли такая фигура, что ее можно разрезать как на три S–лесенки, так и на три Z-лесенки?*

Ответ: Да, можно. **Пример:**

2. *Для положительных чисел a и b докажите неравенство $8(a+b+2) < (5+a^2)(5+b^2)$.*

Решение. Заметим, что $5+a^2 = 4+(a-1)^2+2a \geqslant 4+2a$. Откуда $(5+a^2)(5+b^2) \geqslant (4+2a)(4+2b) = 16+8a+8b+4ab > 8(a+b+2)$.

3. *BL — биссектриса треугольника ABC, а O — центр описанной окружности треугольника ABL. Оказалось, что точки O и L симметричны относительно AB. Найдите углы треугольника ABC.*

Решение. Так как точка O симметрична L относительно AB, то O лежит вне треугольника ABC. Пусть $\angle LBA = \angle OBA = \angle OAB = \angle LAB = \alpha$. Так как O центр описанной окружности, то $\angle ALB = \angle ALO + \angle BLO = 4\alpha$. Таким образом $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle ACB = \angle ALB - \angle LBC = 3\alpha$. Откуда углы треугольника $30°$, $60°$, $90°$.

4. *Целые числа x и y таковы, что $x^2-2xy+y^2-5x+7y$ и $x^2-3xy+2y^2+x-y$ делятся на 17. Докажите, что $xy-12x+15y$ также делится на 17.*

Решение. Заметим, что $x^2-3xy+2y^2+x-y = (x-y)(x-2y+1)$, то есть, либо $x-y$ делится на 17, либо $x-(2y-1)$ делится на 17. В первом случае получим $x^2-2xy+y^2-5x+7y-2x$ делится на 17, то есть x и y делятся на 17, откуда $xy-12x+15y$ делится на 17. Во втором случае $x^2-2xy+y^2-5x+7y$ дает такой же остаток от деления на 17 как и $(2y-1)2-2(2y-1)y+y^2-5(2y-1)+7y$, откуда после преобразований получаем, что y^2-5y+6 делится на 17. Также, $xy-12x+15y$ дает при делении на 17 остаток как $2y^2-10y+12 = 2(y^2-5y+6)$. Значит, и в этом случае $xy-12x+15y$ делится на 17.

5. *Кощей Бессмертный написал на доске два разных натуральных числа. Каждую минуту он дописывает на доску половину суммы двух чисел, написанных на доске последними (например, если написано число 16, а потом 8, то выписаны будут числа: 16, 8, 12, 10, 11, . . .). Докажите, что рано или поздно на доске появится нецелое число.*

Решение. Заметим, что разность между соседними числами уменьшается в два раза на каждый следующий шаг, следовательно, рано или поздно она перестанет быть целой. А тогда числа не могут быть всегда целыми.

6. *На олимпиаду пришло 44 ребенка. Каждый из них знаком ровно с 27 другими, причём есть 22 человека, любые двое из которых знакомы. Докажите, что участников можно разбить на две группы таким образом, чтобы каждые два ученика, попавших в одну группу, были знакомы между собой.*

Решение: Пусть каждые двое знакомых совершат рукопожатие. Зафиксируем 22 человека, любые двое из которых знакомы. Назовём их синими, а остальных 22 — зелёными. Каждый из синих знаком с 21 синим и, стало быть, с шестью зелёными. Значит, всего зелёные совершили с синими 132 рукопожатия. Поскольку в сумме у зелёных должно быть $27 \cdot 22 = 594$ рукопожатий, 132 из них приходятся на рукопожатия зелёных с синими. Так как каждый из зелёных мог пожать руки только 21 зелёному, отсюда следует, что между зелёными были совершены все возможные рукопожатия, то есть каждый из зелёных дружит с каждым, что и завершает доказательство.