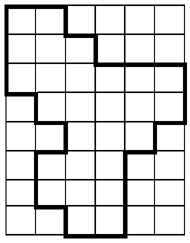
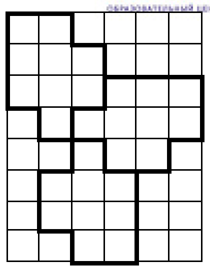
Образовательный центр «Сириус»
Отборочная олимпиада сентябрьской смены, 23.04.2016

Решения 6 класса

Задача 6-1. Разрежьте фигуру на три одинаковые части (одинаковыми называются части, которые совпадают при наложении).





Ответ: <u>…см. рис</u>

<u>Критерии.</u> Правильное разрезание – 7 баллов.

Задача 6-2. Аня заменила в произведении $\text{С} \cdot \text{И} \cdot \text{Р} \cdot \text{И} \cdot \overline{\text{УС}}$ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. На какую наибольшую степень двойки может делиться полученный результат, если известно, что он не равен нулю?

Ответ: <u>$4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 64 = 2^{15}$</u> ***Решение.*** Двузначное число, которое делится на наибольшую степень двойки – это 64, это возможно, если С=4, У=6. Кроме того, из однозначных на наибольшую степень двойки делится число 8, это не противоречит числу 64. Значит, И=8. На букву Р осталась еще одна четная цифра, это 2. Итого получаем 15-тую степень.

<u>Критерии.</u> Ответ без обоснования и примера – 1 балл, ответ с примером – 2 балла.

Задача 6-3. Алиса съела яблоко и внезапно выросла в 125 раз. Она горько заплакала, но тут ей на глаза попалась бутылочка, на которой было написано: «Жидкость, уменьшающая рост на 80%». Сколько порций этой микстуры надо выпить Алисе, чтобы вернуться в прежнее состояние?

Ответ: <u>3 раза</u> ***Решение.*** Если сначала Алиса имела рост x, то после того, как она съела яблоко, ее рост стал равен $125x$. После первой порции микстуры ее рост станет равен $125x \cdot(1\text{-}0{,}8) = 25x$. После второй порции рост станет равен $25x\cdot(1\text{-}0{,}8) = 5x$, и последняя порция $5x\cdot(1\text{-}0{,}8) = x$, после чего больше пить микстуру не надо.

<u>Критерии.</u> Ответ без обоснования – 1 балл. Арифметические ошибки при верном ходе решения – минус 2 балла. Если проценты берутся неправильно, решение в корне неверно, стоит 0 баллов.

Задача 6-4. На листе бумаги выписаны 100 целых подряд идущих чисел. Аня посчитала сумму всех четных выписанных чисел, а Боря – нечетных. Может ли сумма у Бори быть больше, чем сумма у Ани, при этом ровно в два раза?

Ответ: <u>да, может.</u> ***Решение.*** Так как сумма у Ани меньше, чем у Бори, то выписанные числа начинаются с четного. Разобьем их на пары, в каждой из которых нечетное число на 1 больше четного. Таких пар 50, поэтому разность между суммами Ани и Бори равна 50. Значит, сумма Ани равна 50. Обозначим наименьшее число за a. Тогда $50 = a+(a+2)+(a+4)+\ldots+(a+98) = 50a+0+2+4\ldots+98 = 50a+ 2(1+2+\ldots+49) = 50\cdot49+50a$, откуда $49+a = 1$, $a = -48$. Нам подходит единственный пример –48, –47, –46, …, 50, 51. В принципе, достаточно просто привести пример и подсчетом доказать, что он подходит.

<u>Критерии.</u> Пример без подтверждающих вычислений (проверки) – 5 баллов. Если есть пример и проверка, но не доказано, почему пример единственный – 7 баллов (так как единственности в задаче не требуется). При решении используются рассуждения типа приведенных выше, но допускаются арифметические ошибки, вследствие которых получается неверный пример – 4 балла.

Задача 6-5. Девочки Аня, Оля и Настя купили в магазине рыбок и пошли кормит котов Феникса и Себастиана (каждая девочка может дать еду любому коту). Оля дала Себастиану 25 рыбок, а Аня дала Фениксу 7 рыбок. Известно, что Себастиан съел столько рыбок, сколько купили Аня и Настя вместе. Сколько рыбок получил Феникс от Насти?

Ответ: <u>18 рыбок.</u> ***Решение.***

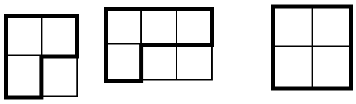
	Аня	Оля	Настя
Себастиан	a	25	c
Феникс	7	b	d

Запишем таблицу и обозначим, сколько рыбок каждая девочка дала каждому коту. Аня и Настя в сумме купили $a+7+c+d$ рыбок. В то же время Себастиан съел $a+25+c$ рыбок. Приравняв эти выражения, получим, что $d = 25–7=18$ рыбок.

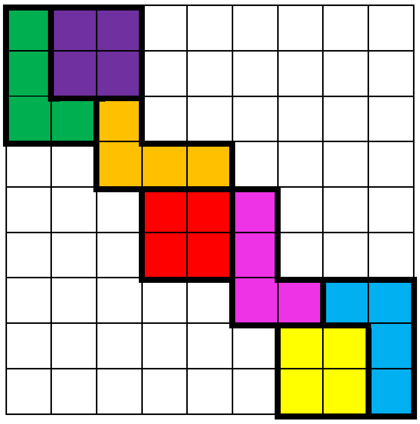
Можно рассуждать и без переменных. Аня и Настя кормили Себастиана и Феникса. Значит, то, что досталось от Ани и Насти Фениксу, докормила Себастиану Оля, то есть это в сумме 25 рыбок. При этом Аня дала Фениксу 7 рыбок, значит, Настя дала 18.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Арифметические ошибки при верном ходе решения – минус 2 балла. Если все решение заключается в том, что написано 25–7 = 18, без других пояснений - 2 балла.

Задача 6-6. У Вити есть неограниченное количество фигурок каждого вида (см.рис.) – в виде квадратика 2×2, в виде уголка и в виде буквы «Г». Он хочет положить несколько из них без наложений в квадрат 9×9 так, чтобы в каждой горизонтали и вертикали были заняты минимум три клетки. Какое наименьшее количество фигур потребуется Вите?



Ответ: 7 фигурок. ***Решение.*** Заметим, что в каждом столбце и в каждой строке (назовем их линиями) должно быть занято по три клетки, значит, в сумме занято не менее 27 клеток. Площадь каждой фигурки не больше 4 клеток, значит, нам потребуется 7 фигур.



Критерии. Оценка стоит 2 балла. Пример – 4 балла. Ответ без оценки и примера – 1 балл.

Задача 6-7. Юра написал на доске несколько натуральных чисел. За первый ход он прибавил к каждому числу 1. За второй ход он прибавил к каждому четному числу по единице. За третий ход он прибавил по единице ко всем числам, кратным трем, и так далее, на k-том шагу он прибавлял единицу ко всем числа, кратным k. Докажите, что равно или поздно все числа на доске станут равны.

Решение. Рассмотрим для каждого числа разность этого числа и номера хода. В самом начале она больше нуля (так как числа натуральные). Если она в какой-то момент станет равна 0, то это означает, что число равно номеру хода, и в дальнейшем за каждый ход будет увеличиваться на 1, поэтому разность всегда будет равна 0. Заметим, что разность может только уменьшаться, но не может увеличиваться. Если все разности стали равны нулю, то задача решена. Если это не так, то рано или поздно одна из разностей станет равна ненулевому числу d>0 и перестанет изменяться. Это означает, что некоторое число n+d делится на d, n+1+d делится на d+1, n+2+d делится на d+2 так далее до бесконечности. Но это означает, что само число n делится на d, d+1, d+2, …, т.е. на все числа, большие или равные d, что невозможно.

Критерии. Идея рассмотреть разности без дальнейшего продвижения – 2 балла. Если сформулировано утверждение, что если число равно номеру хода, или эквивалентное утверждение, то так будет дальше всегда – 2 балла.

Образовательный центр «Сириус»
Отборочная олимпиада сентябрьской смены, 23.04.2016

Решения 7 класса

Задача 7-1. Катя заменила в произведении $С \cdot И \cdot Р \cdot И \cdot \overline{УС}$ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. На какую наибольшую степень пятерки может делиться полученный результат, если известно, что он не равен нулю?

Ответ: третья степень. ***Решение.*** Если число делится на 5, то оно заканчивается на 0 или на 5. Но если *С* = 0, то всё произведение равно нулю, противоречие. Поэтому, если двузначное число $\overline{УС}$ будет делиться на 5, то оно заканчивается на 5, С = 5. Наибольшая степень пятерки, на которую может делиться $\overline{УС}$, это 25. Итого получаем третью степень и пример 5·2·1·2·75. Если двузначное число $\overline{УС}$ не делится на 5, то наибольшая степень будет, если И=5, но это вторая степень, что меньше.

Критерии. Ответ без обоснования и примера – 1 балл, ответ с примером без обоснования – 3 балла. Если не рассмотрен случай, когда УС не делится на 5, ставиться 4 балла.

Задача 7-2. У Кати есть доска 8×8, каждая клетка которой покрашена в какой-то цвет. Назовем прямоугольник крайним, если его стороны идут по линиям сетки и одна из сторон совпадает с верхним или нижним краем доски. За один ход Катя может перекрасить в черный цвет или белый цвет любой крайний прямоугольник. Всегда ли у неё получится с помощью таких действий раскрасить всю доску в шахматном порядке?

Ответ: да. ***Решение.*** да. Решение. Будем пользоваться только прямоугольниками, прилегающими к правому верхнему углу. Упорядочим клетки на доске, как показано на рисунке.

57	58	59	60	61	62	63	64
49	50	51	52	53	54	55	56
41	42	43	44	45	46	47	48
33	34	35	36	37	38	39	40
25	26	27	28	29	30	31	32
17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Посмотрим на цвет клетки 1. Если он нас не удовлетворяет, перекрасим прямоугольник с одной вершиной в клетке 1 и противоположной вершиной в правом верхнем углу. Теперь проделаем то же с вершиной 2 и т.д. Заметим, что при «обработке» каждой новой клетки все клетки с меньшими номерами остаются нетронутыми

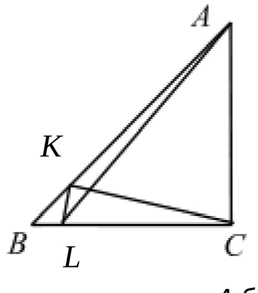
Критерии. Алгоритм без обоснования – не более 4 баллов. Если считается изначально, что доска раскрашена ровно в два цвета, баллов не снимать, так как решение от этого не зависит

Задача 7-3. Алиса съела яблоко и внезапно выросла в 64 раза. Она горько заплакала, но тут ей на глаза попалась бутылочка, на которой было написано: «Жидкость, уменьшающая рост на …%», только вот на сколько процентов, было стерто. Алиса отхлебнула из этой бутылочки три раза и, о счастье, оказалась прежнего роста. Восстановите стертое число.

Ответ: 75. ***Решение.*** Если сначала Алиса имела рост *x*, то после того, как она съела яблоко, ее рост стал равен 64*x*. Будем искать не стертое число процентов, а то, во сколько раз должен измениться её рост за одно принятие микстуры. Пусть он должен измениться в *a* раз. После первой порции микстуры ее рост станет равен 64*ax,* после второй – $64a^2x$, после третьей – $64a^3x = x$. Значит, a^3=1/64, *a* = ¼ = 0,25. Но это соответствует уменьшению на 75%.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Арифметические ошибки при верном ходе решения – минус 2 балла. Неверное понимание процентов - 0 баллов.

Задача 7-4. В прямоугольном треугольнике *ABC* ∠*C* = 90°, ∠*A* = 50°. На сторонах *AB* и *BC* отмечены точки *K* и *L* соответственно так, что ∠*BAL* = 5°, ∠*BCK* =10°. Найдите ∠*CKL*.



Ответ: 85°. ***Решение.*** . ∠*CAL* = 50°–5° = 45°. Тогда ∠*ALC* = 45°, треугольник *ALC* прямоугольный и равнобедренный, *AC = CL*. В треугольнике *ACK* ∠*A* = 50°, ∠ *C* = 80°, значит, ∠ *K* = 50°, а треугольник равнобедренный, *AC = CK*. Таким образом, в треугольнике *KCL* стороны *CK* и *CL* равны, а ∠*C* = 10°. Значит, ∠ *CDE* = (180° – 10°)/2 = 85°.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Если в решении не обоснованы все факты и вычисления, но все одинаковые стороны и равные углы отмечены на чертеже, кроме того, есть ответ – 4 балла. Если при этом нет ответа – 2 балла.

Задача 7-5. На листе бумаги выписаны 100 целых подряд идущих чисел. Аня посчитала сумму всех четных выписанных чисел, а Боря – нечетных. Может ли сумма у Бори быть больше, чем сумма у Ани, при этом ровно в три раза?

Ответ: нет. ***Решение.*** Так как сумма у Ани меньше, чем у Бори, то выписанные числа начинаются с четного. Разобьем их на пары, в каждой из которых нечетное число на 1 больше четного. Таких пар 50, поэтому разность между суммами Ани и Бори равна 50. Значит, сумма Ани равна 25. Обозначим наименьшее число за a. Тогда $25 = a+(a+2)+(a+4)+\ldots+(a+98) = 50a+0+2+4\ldots+98 = 50a+2(1+2+\ldots+49) = 50\cdot 49+50a$. Это выражение делится на 50, а 25 не делится на 50.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. За ошибки при подсчетах или преобразованиях, не повлекшие изменения хода решения, снимается 2 балла. Подсчитано, чему должна быть равна сумма у Ани без дальнейших продвижений – 2 балла.

Задача 7-6. Найдите наименьшее число, которое заканчивается на 2016, делится на 2016 и имеет сумму цифр, равную 2016.

Ответ: $\overline{389998\underbrace{99\ldots9}_{216}8}$. ***Решение.*** Вычтем из нашего числа 2016, получим $\overline{\ldots x0000}$. Наше новое число должно делиться на $2016 = 32\cdot 7\cdot 9$ и иметь сумму цифр 2016–2–1–6 = 2007. Заметим, что последние четыре нуля обеспечивают делимость на 16, чтобы число делилось на 32, цифра x должна быть четной, поэтому x не более 8. Делимость на 9 мы получим автоматически, так как число 2016 делится на 9. Осталось обеспечить делимость на 7. Так как 2007:9 = 223, но в пятом с конца разряде стоит не девятка, то у нас будет не менее 224 цифры. Попробуем добиться ровно 224 цифр. Если первая 1, последняя не больше 8, то это число 199..98= $= 10^{223}+\underbrace{99\ldots9}_{222}\times 10+8$. Так как число 999999 делится на 7, то и число из 222 девяток делится на 7. 10^3 дает остаток 6 при делении на 7, 10^6 дает остаток 1, значит, 10^{222} дает остаток 1 при делении на 7, поэтому 199..98 дает такой же остаток, как и 18, не делится на 7.

Пусть число начинается с 2. Тогда по сумме цифр одна из девяток должна быть заменена на 8, и в конце стоит 8, т.е. это число $2999\ldots98-10^n$. Но число 2999…98 делится на 7 (так как дает тот же остаток, что и 28). Поэтому наше число на 7 делится не может.

Пусть число начинается с 3. Если это 37… и так далее, то вариант один – 37999…98. Представим его как $399..95+3-2\cdot 10^{222}$. Остаток этого числа при делении на 7 будет равен 0+3–2, т.е. 1. Пусть число начинается с 38… Тогда это число $38999\ldots98-10^n=399\ldots95+3-10^{222}-10^n$, остаток равен $2-10^n$.Проверим, может ли степень десятки давать остаток 2 при делении на 7. Остатки зацикливаются, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1…Двойка тоже встречается через шесть степеней. Выберем наибольшую возможную степень и получим ответ.

Критерии. Ответ без обоснования – 2 балла. Неправильно разобранные случаи при переборе снимают по 2 балла.

Задача 7-7. На острове расположены несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами. Известно, что из любого города по этим дорогам можно проехать в любой другой. Туристы Педро и Базилио запланировали маршруты, каждый – свой и с разными начальными пунктами, так, чтобы проехать наибольшее возможное количество городов, причем в каждом городе побывать не более одного раза. Докажите, что обязательно найдется город, который посетили оба туриста.

Решение. Пусть самый длинный маршрут Педро, ведущий из города А в город Б, и самый длинный маршрут Базилио, ведущий из города В в город Г, не пересекаются. Тогда найдется маршрут М, ведущий из города Д на маршруте Педро в город Е на маршруте Базилио, проходящий через каждый свой город по одному разу и на проходящий через другие города на маршрутах этих туристов. Рассмотрим маршруты А – Д – Е – Г для Педро и В – Е – Д – Б для Базилио. Их суммарная длина больше суммарной длины исходных маршрутов на удвоенную длину маршрута М. Поэтому хотя бы один из этих маршрутов длиннее соответствующего исходного. Противоречие.

Критерии. Рисунок, где есть два маршрута и перемычка между ними, кроме того, как-то выделен хотя бы один маршрут (в вышеприведенном решении – новые маршруты Педро и Базилио), без обоснований – 4 балла.

Образовательный центр «Сириус»
Отборочная олимпиада сентябрьской смены, 23.04.2016

Решения 8 класса

Задача 8-1. Таня заменила в произведении $С \cdot И \cdot Р \cdot И \cdot \overline{УС}$ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться результат, если известно, что он не равен нулю?

Ответ: на три нуля. ***Решение.*** Рассмотрим сначала, какую наибольшую степень тройки мы можем получить. Если двузначное число $\overline{УС}$ не делится на 5, то наибольшая степень будет, если И=5, это вторая степень. Если $\overline{УС}$ делится на 5, то либо $С = 0$, тогда всё произведение равно нулю, противоречие. Поэтому С = 5. Наибольшая степень пятерки, на которую может делиться $\overline{УС}$, это 25, и еще одну пятерку получаем за счет первого сомножителя С. Итого третья степень пятерки, и не больше. Осталось привести пример, когда заканчивается на 3 нуля, что легко 5·4·1·4·75.

Критерии. Ответ без обоснования и примера – 1 балл, ответ с примером без обоснования – 3 балла. Если не рассмотрен случай, когда УС не делится на 5, ставиться не более 4 баллов.

Задача 8-2. Группа одноклассников собиралась с поход. Дима немного опоздал, и учитель записал, во сколько раз увеличилась численность группы после прихода Димы. Еще через некоторое время пришел Саша, и учитель снова записал, во сколько раз увеличилась группа после прихода Саши. То же самое учитель сделал после прихода запоздавшего Леши, а уж после прихода Толика, который опоздал больше всех, учитель записал и четвертое число. Произведение четырёх записанных чисел оказалось равным 4/3. Сколько человек пошло в поход?

Ответ: 16. ***Решение.*** Пусть изначально было n человек, тогда первое записанное учителем число равно $\frac{n+1}{n}$, второе - $\frac{n+2}{n+1}$, третье - $\frac{n+3}{n+2}$ и четвертое - $\frac{n+4}{n+3}$. Произведение этих чисел очевидно равно $\frac{n+4}{n}=\frac{4}{3}$, откуда получаем, что $3n+12 = 4n$, $n=12$. Отсюда получаем ответ.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. За арифметические ошибки при правильном ходе решения снимается 2 балла. Ответ с проверкой – 1 балл.

Задача 8-3. На продолжении стороны *BC* за точку *C* отмечена точка *D* такая, что *BC*=*CD*, а на продолжении стороны *CA* за точку *A* отмечена точка *E* такая, что *AE* = 2*AC*. Оказалось, что *DA* = *BE*. Докажите, что треугольник *ABC* – прямоугольный.

Решение. Продолжим сторону *CA* за точку *C* и поставим там точку *F* так, что *CF* = *CA*. Рассмотрим четырехугольник *ABFD*. В нем диагонали пересекаются в точке *C* и делятся пополам, значит, это параллелограмм. Но тогда *AD* = *BF*, отсюда *BF* = *BE*, треугольник *FBE* – равнобедренный. Так как *AE* = 2*AC*, и *AF* = 2*AC*, то *BA* – медиана в равнобедренном треугольнике, отсюда – медиана в равнобедренном треугольнике, откуда $\angle A = 90°$.

Критерии. Правильное построение на чертеже без дополнительных обоснований – 3 балла.

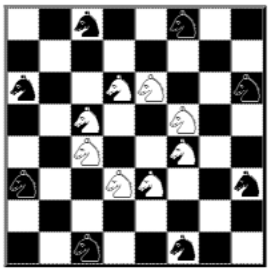
Задача 8-4. На листе бумаги выписаны $2k$ (k>5) целых подряд идущих чисел. Аня посчитала сумму всех четных выписанных чисел, а Боря – нечетных. Может ли сумма у Ани быть меньше, чем сумма у Бори, при этом ровно в три раза?

Ответ: нет. ***Решение.*** Так как сумма у Ани меньше, чем у Бори, то выписанные числа начинаются с четного. Разобьем их на пары, в каждой из которых нечетное число на 1 больше четного. Таких пар k, поэтому разность между суммами Ани и Бори равна k. Значит, сумма Ани равна $0{,}5k$. Обозначим наименьшее число за a. $a+(a+2)+..(a+2k–2) = ka+0+2+4…+(2k–2) = 2(1+2+…+(k–1))+ka = k\cdot(k-1)+ka$, Это число делится на k, а $0{,}5k$ не делится на k.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. За ошибки при подсчетах или преобразованиях, не повлекшие изменения хода решения, снимается 3 балла. Подсчитано, чему должна быть равна сумма у Ани без дальнейших продвижений – 2 балла.

Задача 8-5. На шахматной доске стояло несколько коней. Когда каждый из них сделал по одному ходу, расстояние между любыми двумя конями увеличилось. Какое наибольшее число коней могло быть?

Ответ: 8. ***Решение.*** Кони умеют прыгать только в восьми направлениях, поэтому если коней хотя бы 9, то два из них прыгнули в одном направлении, и расстояние между ними не изменилось. Пример для 8 коней показан на рис. белым цветом в центре показаны кони в исходных позициях, чёрным цветом у краёв доски – кони после сделанных ходов.



Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Пример – 4 балла. Оценка – 3 балла.

Задача 8-6. Миллиардер Абрам Романович оставил наследство из нескольких яхт общей стоимостью 1 000 000 000 $. Кроме того, оказалось, что, не пиля яхты, можно разделить всё поровну между 5 детьми от первого брака, а можно – между всеми 8 наследниками поровну. Какую наибольшую стоимость может иметь самая дешевая яхта?

Ответ: 50 000 000 $. ***Решение.*** Будем, как миллиардеры, считать всё в миллионах долларов. Тогда стоимость наследства составляет 1000. Пример. Возьмем по 4 яхты стоимостью 50, 75, 125, итого 12 яхт. При разделе на 5 частей каждый должен получить по 200, это 4 раза по 75+125 и один раз 50+50+50+50. При делении на 8 частей каждый должен получить по 125, это либо 125 (4 наследника), либо 75+50 (4 наследника).

Оценка. Если яхт ровно 8, то они все равны 125. Но тогда их нельзя поровну поделить между пятью наследниками. Значит, при делении на 8 хотя бы одна часть наследства состоит из двух яхт. Тогда заменим все яхты, стоящие ровно 125, на две яхты стоимостью 62,5. От этого нижняя оценка не изменится (так как есть часть наследства в 125, состоящая из двух яхт) и возможность деления на 5 наследников не изменится. Значит, теперь яхт стало не меньше 16. При делении на 5 частей кому-то достанется не менее 4 яхт. А значит, стоимость таких яхт не меньше, чем 200:4 = 50.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Пример – 3 балла. Оценка – 4 балла.

Задача 8-7. Внутри (или на границе) квадрата со стороной 2 выбрали 5 точек. Какое наибольшее количество треугольников с вершинами в этих точках может иметь площадь, большую 1?

Ответ: 8. ***Решение.*** Оценка. Соединим середины верхней и нижней сторон квадрата. По принципу Дирихле, в одной из половинок будут хотя бы три выбранные точки. Площадь треугольника с вершинами в этих точках не больше 1. Аналогично, соединим середины левой и правой стороны квадрата. Если все те же три точки A, B, C оказались в одной из половинок, то они лежат в одной четверти. Пусть D – любая из остальных точек. Тогда площадь $ABCD$ (точнее, выпуклой оболочки этих четырех точек) не больше 2, а значит, площадь хотя бы одного из треугольников ABD и BCD не больше 1. Если же в верхней или нижней половинке оказалась другая тройка точек, то также имеем еще один треугольник, площадь которого не больше 1.

Пример. Например, точки можно брать так: три угла квадрата (все, кроме левого верхнего) и две точки левого верхнего квадранта, находящиеся близко к середине левой и середине верхней стороны соответственно.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Пример – 3 балла. Оценка – 3 балла.

Образовательный центр «Сириус»
Отборочная олимпиада сентябрьской смены, 23.04.2016

СИРИУС
образовательный центр

Решения 9 класса

Задача 9-1. Ваня заменил в произведении $\text{С} \cdot \text{И} \cdot \text{Р} \cdot \text{И} \cdot \overline{\text{УС}}$ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. На какую наибольшую степень шестерки может делиться результат, если известно, что он не равен нулю?

Ответ: шестая степень. ***Решение.*** Пример. 6·9·8·9·36. Оценка. Попробуем получить седьмую степень шестерки. Назовем показателем числа сумму степеней двоек и троек, входящих в разложение его на простые. Показатель цифры 8 равен трем, показатель остальных цифр – не более 2. Итого произведение С·И·Р·И даст не более 2+3+2+3 = 10 сомножителей. Чтобы получить седьмую степень, надо минимум 14 сомножителей, итого двузначное число $\overline{\text{УС}}$ должно дать не менее 4. Если $\overline{\text{УС}}$ – степень двойки, то произведение С·И·Р·И дает не более 1+2+1+2 = 6 троек, степень шестерки не более чем шестая.

Пусть УС - не степень двойки, тогда её показатель не более 4. Тогда он равен ровно 4, а С·И·Р·И должно дать ровно 10 сомножителей, то есть И = 8. Но тогда С·Р дадут не более чем 2+1 = 3 тройки, значит, $\overline{\text{УС}}$ должно дать четыре тройки, что возможно только при 81= 3^4. Но уже И=8, противоречие.

Критерии. Ответ без примера и оценки – 1 балл, пример с ответом – 3 балла. Оценка может быть сделана по-разному, если при оценке упущены какие-то очевидные случаи (например, двузначное число – больная степень двойки), снимается один балл, иначе – 3 балла.

Задача 9-2. Петя и Вася по очереди красят клетки доски 30×30. Изначально вся доска белая. Петя в свой ход красит одну любую непокрашенную клетку в черный цвет, а Вася в свой ход красит любые две непокрашенные клетки в красный цвет. Перекрашивать уже покрашенные клетки нельзя. Петя выигрывает, если по окончании игры появится черный уголок из трех клеток. Сможет ли Вася ему помешать?

Ответ: да, сможет. ***Решение.*** После каждого хода Пети Вася красит в красный цвет клетку слева и клетку справа от только что покрашенной Петей. Если же там край доски или уже покрашенная клетка – то любую свободную. Общее число клеток делится на 3, поэтому так сделать всегда можно. После окончания игры на доске не будет двух черных клеток, образующих горизонтальную доминошку, а в состав любого уголка входит горизонтальная доминошка.

Критерии. Ответ без обоснования -0 баллов. Стратегия Васи без обоснования, почему она приведет к результату – 6 баллов.

Задача 9-3. Часовая, минутная и секундная стрелки часов имеют одинаковую длину. Часы пищат, если концы стрелок оказываются в вершинах прямоугольного треугольника. Какое наименьшее число писков могут издать часы в течение одного часа? Самое начало часа – 00 минут 00 секунд – принадлежит этому часу.

Ответ: 118. ***Решение.*** Если стрелки в вершинах прямоугольного треугольника, то одна сторона – диаметр, то есть стрелки располагаются на одной прямой. Если сделать одну стрелку отраженной, отразим центрально-симметрично относительно центра часов, то это означает, что настоящая и отраженной стрелки совместятся. Часовая и минутная. Если отраженная часовая идет от 11 до 12, то минутная стрелка совместится с ней ровно в 12, а это уже другой час. Итого ни одного обгона. Часовая и секундная. Секундная обгонит отраженную часовую на каждом обороте, итого 60 раз, но один обгон может быть совмещен с 12 часами, это уже следующий час. Итого 59 обгонов минимум. Секундная и минутная. Отразим минутную. Она делает 1 оборот, секундная – 60 оборотов, итого 59 обгонов. Значит, всего максимум 118 обгонов, при условии, что это час от 5 до 6.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балла. Если решение в целом правильное, но забыто, что часовая и минутная стрелки могут дать 0 обгонов, в итоге ответ 119 – 5 баллов.

Задача 9-4. Могут ли одновременно при некотором действительном числе *a* быть целыми числа $a+\sqrt{15}$ и $\frac{1}{a-\sqrt{15}}$? Если нет, то докажите, если да, то найдите все такие числа a.

Ответ: нет, не могут. ***Решение.*** Пусть $n=a+\sqrt{15}$, тогда $n-\sqrt{15}=a$, $\frac{1}{a-\sqrt{15}}=\frac{1}{n-2\sqrt{15}}=\frac{n+2\sqrt{15}}{n^2-60}$. Разложим эту дробь на сумму двух, первая $\frac{n}{n^2-60}$ - очевидно, рациональное число. Значит, и вторая должна быть рациональной, $\frac{2\sqrt{15}}{n^2-60}=\frac{p}{q}$, но тогда число $\sqrt{15}=\frac{p\left(n^2-60\right)}{2q}$ рационально, а это не так.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов, ошибки при преобразованиях, не повлиявшие на ход решения – снимается до 3 баллов.

Задача 9.5. Основание *AB* трапеции *ABCD* является диаметром окружности ω. Оказалось, что окружность ω касается прямой *CD* и проходит через середины боковых сторон. Найдите углы трапеции.

Ответ: 75°, 105° ***Решение.*** Обозначим центр окружности через *O*, точку касания со стороной *CD* обозначим *F*, а середину *AD* обозначим *M*. *OF* перпендикулярно *CD*, поэтому и $\angle FOA = 90°$.Продлим *OM* до пересечения с прямой *CD*, обозначим эту точку за *K*. Пусть $\angle DAO = \alpha$, треугольник *AOM* – равнобедренный, поэтому $\angle AOM = 180° – 2\alpha$, $\angle MOF = 2\alpha – 90°$. Треугольники *AOM* и *DKM* равны по двум углам и стороне ($AM = DM$, $\angle AMO = \angle DMK$ как вертикальные, $\angle KDM = \angle OAM$ как накрест лежащие). Но тогда $KM = MO = r$. Рассмотрим прямоугольный треугольник *KFO*. В нем $KO = 2r$, $FO = r$, поэтому $\angle KOF = 60°$. Получаем, что $2\alpha – 90° = 60°$, $\alpha = 75°$.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Если есть верный чертеж, на котором выписаны углы, но нет пояснений – до 5 баллов.

Задача 9-6. На листе бумаги выписаны несколько целых подряд идущих чисел. Аня посчитала сумму всех четных выписанных чисел, а Боря – нечетных. Может ли сумма у Бори быть больше, чем сумма у Ани, при этом ровно в три раза?

Ответ: нет. ***Решение.*** Пусть выписано $2k$ чисел. Так как сумма у Ани меньше, чем у Бори, то выписанные числа начинаются с четного. Разобьем их на пары, в каждой из которых нечетное число на 1 больше четного. Таких пар k, поэтому разность между суммами Ани и Бори равна k. Значит, сумма Ани равна $0{,}5k$. Обозначим наименьшее число за a. $a+(a+2)+..(a+2k–2) = ka+0+2+4…+(2k–2) = 2(1+2+…+(k–1))+ka = k\cdot(k-1)+ka$, Это число делится на k, а $0{,}5k$ не делится на k.

Пусть выписано $2k+1$ число. Так как сумма Бори больше, то он складывает числа, начиная с первого, поэтому начало и конец – нечетные. Обозначим наименьшее число за a. Тогда сумма Бори больше, чему Ани, на $a+k$, значит, сумма Ани равна $0{,}5(a+k)$. Считаем её сумму $k(a+1)+0+…+(2k–2) = k(a+1) + k\cdot(k-1) = ka+k^2=0{,}5a+0{,}5k$. Значит, $2k^2+k(2a–1)–a=0$. Дискриминант равен $4a^2–4a+1+8a=(4a+1)^2$, $k = (2a–1\pm(4a+1)/4$, $k_1= 3a/2$, $k_2=(–a-1)/2$.

Так как k – целое, а a – нечетное, то k_1 не подходит. Теперь заметим, что $k>0$, поэтому $–a–1>0$, $a \leq –2$. С другой стороны, $a+k > 0$, $a + \frac{-a-1}{2} = \frac{a-1}{2} < 0$, противоречие.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. Рассмотрение только одного случая (когда выписано четное количество чисел и когда выписано нечетное количество чисел) – не более 4 баллов. Рассмотрение только одного корня квадратного уравнения – снимается 2 балла.

Задача 9-7. 40 членов жюри выбирали задачу на первое место для отборочной олимпиады из имеющегося списка тридцати задач. Была договоренность, что такой задачей может быть только такая задача, которую решила хотя бы половина членов жюри, но не все. Известно, что каждый решил ровно по 26 задач, причем у любых двух человек наборы решенных ими задач не совпали. Докажите, что среди задач есть хотя бы одна такая, которая может быть задачей на первое место.

Решение. Предположим противное. Пронумеруем задачи и членов жюри по порядку. Рассмотрим таблицу из 40 строк и 30 столбцов. В клетку в строке *N* и столбце *M* будем писать 1, если член жюри *N* решил задачу *M*. Тогда всего будет ровно $40\cdot 26=1040$ единиц. С другой стороны, так как мы предположили, что пригодных на первое место задач нет, то каждую задачу или решили все члены жюри (пусть таких задач будет k), или не более 19-ти членов жюри (таких задач $30-–k$). Значит, количество единиц не превосходит $40k+19(30–k) = 21k+570$, откуда $k \geq 23$. Выберем такие 23 задачи, которые решили все, значит, из 7 оставшихся задач каждый решил ровно 3. Количество способов выбрать 3 задачи из 7 равно 35, а членов жюри только 30. Поэтому у двоих из них совпали наборы решенных задач, что противоречит условию.

Критерии. Доказательство того, что есть не менее чем 23 задачи, которые решили все, стоит 2 балла. За мелкие арифметические ошибки, не повлиявшие на ход решения, снимается 2 балла.

Образовательный центр «Сириус»
Отборочная олимпиада сентябрьской смены, 23.04.2016

Решения 10 класса

Задача 10-1. Два коммерсанта делили прибыль. Первый подумал: если бы мне досталось на 40% больше денег, то доля второго уменьшилась бы на 60%. А как изменилась бы доля второго коммерсанта, если бы первый взял себе денег на 60% больше?

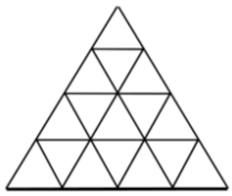
Ответ: Уменьшилась бы на 90%. ***Решение.*** 40% от денег первого равны 60% от денег второго, поэтому у первого денег в 1,5 раза больше. Следовательно, увеличение доли первого на *n* % уменьшает долю второго на 1,5*n*%.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Арифметические ошибки при верном ходе решения – минус 2 балла. Неверное понимание процентов - 0 баллов.

Задача 10-2. Обозначим через $H(n)$ произведение натурального числа n на сумму цифр этого же числа. Оказалось, что для некоторого шестизначного числа n число $H(H(n))$ тоже шестизначное. Найдите все такие n.

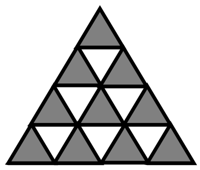
Ответ: 100 000, 110 000, 101 000, 100 100, 100 010, 100 001. ***Решение.*** Заметим, что если сумма цифр n равна 3 и или более, то первая цифра $H(n)$ равна 3 или более. Если сумма цифр $H(n)$ больше 3, т.е. 4 и больше, то $H(H(n))$ уже минимум семизначное. Если же сумма цифр $H(n)$ равна 3, то это число 300 000, у него есть шестизначные делители 100 000 и 150 000, но для них $H(n)$ не равно 300 000. Пусть сумма цифр n была равна 1, тогда это 100 000, и это число подходит. Пусть сумма цифр n была равна 2, то это либо 200 000, но $H(H(200\,000)$ = 1 600 000, либо это 110 000, 101 000, 100 100, 100 010, 100 001, каждое из которых подходит.

Критерии. Выписаны все ответы, нет обоснования – 1 балл.



Задача 10-3. Можно ли клетки «треугольной» доски (см. рис.) раскрасить в 7 цветов так, чтобы для любых двух разных цветов нашлись две соседние (граничащие по стороне) клетки, окрашенные в эти цвета?

Ответ: нет, нельзя. ***Решение.*** Каждые два соседних треугольника имеют общих отрезок. Таких отрезков на нашей доске 18 (это стороны шести белых треугольников). Если доску можно закрасить так, что для любых двух различных цветов найдется два соседних треугольника, окрашенные в эти цвета, то им будет соответствовать общий отрезок этих треугольников, причем разным парам цветов будут соответствовать разные отрезки. Всего пар цветов 7·6/2=21. Значит, отрезков должно быть не менее 21, а их только 18. Противоречие.



Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. Идея подсчета пар соседних цветов, и потом ошибки при подсчетах – 3 балла.

Задача 10-4. При каком минимальном n существует многочлен $P(x)$ степени n с рациональными коэффициентами, который положителен при всяком рациональном x, но имеет иррациональный корень?

Ответ: n=4. ***Решение.*** При нечётных n многочлен не может быть всюду неотрицателен. При n=2 описанное невозможно: речь идёт о квадратном трёхчлене с нулевым дискриминантом и рациональными коэффициентами, но его корень рационален ($-b/2a$). Минимальное из оставшихся n равно 4, для него такое бывает: $(x^2-2)^2$.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. Разбор случая n=2 – 2 балла. Разбор случая n=3 – 2 балла. Пример при n=4 – 3 балла.

Задача 10-5. Большой куб 99×99×99 разбит на единичные кубики, после чего для каждого кубика подсчитано, на сколько кубиков он отстоит от нижней, от передней и от левой грани (например, для нижнего левого переднего кубика будут числа 1, 1, 1, а для центрального кубика задней грани будут числа 50, 99, 50). В каждый кубик записали сумму наибольшего и наименьшего из этих трех чисел. Чему равна сумма всех чисел в кубиках?

Ответ: $99^3\cdot 100$ ***.Решение.*** Разобьем все кубики, кроме центрального, на пары, симметричные относительно центра, а именно пару с (x, y, z) образует кубик $(100-x, 100-y, 100-z)$. Сумма чисел, выписанных для каждой пары, равна двумстам, количество пар равно $(99^3-1)/2$. Значит, искомая сумма равна $(99^3–1)\cdot 100+100$ (последнее слагаемое соответствует центральному кубику).

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Идея разбиения на центрально-симметричные кубики, но неверный подсчет – 4 балла.

Задача 10-6. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точка D лежит на стороне BC. Из точки D провели прямую, перпендикулярную OB, до пересечения со стороной AB в точке F. Аналогично из D провели прямую, перпендикулярную OC, до пересечения со стороной AC в точке E. Обозначим через K центр окружности, описанной около треугольника AFE. Докажите, что точки K, F, D, E лежат на одной окружности.

Решение. Обозначим $\angle A$ за α. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$. Обозначим через F_1 точку пересечения DF и OB, через E_1 – точку пересечения DE и OC. Тогда в четырехугольнике F_1DE_1O два угла прямые, поэтому $\angle FDE = 180°-2\alpha$. Рассмотрим четырехугольник $KFDE$. Так как K – центр описанной окружности AFE, то $\angle FKE = 2\alpha$. Но тогда $\angle FKE + \angle FDE = 180°$, четырехугольник $KFDE$ – вписанный.

Критерии. Отдельно за расположением точек следить не надо.

Задача 10-7. В пространстве отмечено 9 точек. Оказалось, что их можно параллельно спроектировать вдоль некоторой прямой на некоторую плоскость так, чтобы их проекциями оказались 3 точки, а можно (вдоль другой прямой и на другую плоскость) так, чтобы их проекциями оказались 4 точки. Можно ли утверждать, что исходные 9 точек лежат в одной плоскости?

Ответ: да, можно. ***Решение.*** Если 9 данных точек при некотором проектировании сливаются в три, то они лежат на трех параллельных прямых a, b и c. Если при другом параллельном проектировании они сливаются в четыре точки, то они вдобавок лежат на четырех параллельных прямых d, e, f и g, не параллельных трем первым. По принципу Дирихле по крайней мере на одной из четырех последних прямых (пусть на прямой d) лежит не менее трех отмеченных точек. Значит, она пересекает все три прямые a, b и c. Рассмотрим плоскость, заданную прямыми d и a. Прямые b и c параллельны ей (поскольку параллельны лежащей в ней прямой a) и имеют с ней по общей точке (там, где пересекаются сё d). Значит все три прямые a, b и c лежат в этой плоскости, а вместе с ними там лежат и все отмеченные точки.