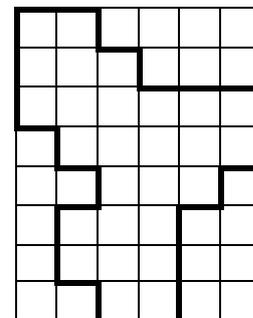


6 класс

Продолжительность олимпиады – 4 часа

6-1. Разрежьте фигуру на три одинаковые части (одинаковыми называются части, которые совпадают при наложении).



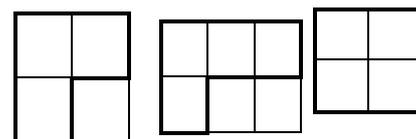
6-2. Аня заменила в произведении $S \cdot I \cdot P \cdot I \cdot \overline{US}$ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. На какую наибольшую степень двойки может делиться полученный результат, если известно, что он не равен нулю?

6-3. Алиса съела яблоко и внезапно выросла в 125 раз. Она горько заплакала, но тут ей на глаза попала бутылочка, на которой было написано: «Жидкость, уменьшающая рост на 80%». Сколько порций этой микстуры надо выпить Алисе, чтобы вернуться в прежнее состояние?

6-4. На листе бумаги выписаны 100 целых подряд идущих чисел. Аня посчитала сумму всех четных выписанных чисел, а Боря – нечетных. Может ли сумма у Бори быть больше, чем сумма у Ани, при этом ровно в два раза?

6-5. Девочки Аня, Оля и Настя купили в магазине рыбок и пошли кормить котов Феникса и Себастиана (каждая девочка может дать еду любому коту). Оля дала Себастиану 25 рыбок, а Аня дала Фениксу 7 рыбок. Известно, что Себастиан съел столько рыбок, сколько купили Аня и Настя вместе. Сколько рыбок получил Феникс от Насти?

6-6. У Вити есть неограниченное количество фигурок каждого вида (см.рис.) – в виде квадрата 2×2 , в виде уголка и в виде буквы «Г». Он хочет положить несколько из них без наложений в квадрат 9×9 так, чтобы в каждой горизонтали и вертикали были заняты минимум три клетки. Какое наименьшее количество фигур потребуется Вите?



6-7. Юра написал на доске несколько натуральных чисел. За первый ход он прибавил к каждому числу 1. За второй ход он прибавил к каждому четному числу по единице. За третий ход он прибавил по единице ко всем числам, кратным трем, и так далее, на k -том шагу он прибавлял единицу ко всем числам, кратным k . Докажите, что рано или поздно все числа на доске станут равными.

7 класс

Продолжительность олимпиады – 4 часа

7-1. Катя заменила в произведении $S \cdot I \cdot P \cdot I \cdot \overline{US}$ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. На какую наибольшую степень пятерки может делиться полученный результат, если известно, что он не равен нулю?

7-2. У Кати есть доска 8×8 , каждая клетка которой покрашена в какой-то цвет. Назовем прямоугольник крайним, если его стороны идут по линиям сетки и одна из сторон совпадает с верхним или нижним краем доски. За один ход Катя может перекрасить в черный цвет или белый цвет любой крайний прямоугольник. Всегда ли у неё получится с помощью таких действий раскрасить всю доску в шахматном порядке?

7-3. Алиса съела яблоко и внезапно выросла в 64 раза. Она горько заплакала, но тут ей на глаза попала бутылочка, на которой было написано: «Жидкость, уменьшающая рост на ...%», только вот на сколько процентов, было стерто. Алиса отхлебнула из этой бутылочки три раза и, о счастье, оказалась прежнего роста. Восстановите стертое число.

7-4. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 50^\circ$. На сторонах AB и BC отмечены точки K и L соответственно так, что $\angle BAL = 5^\circ$, $\angle BCK = 10^\circ$. Найдите $\angle CKL$.

7-5. На листе бумаги выписаны 100 целых подряд идущих чисел. Аня посчитала сумму всех четных выписанных чисел, а Боря – нечетных. Может ли сумма у Бори быть больше, чем сумма у Ани, при этом ровно в три раза?

7-6. Найдите наименьшее число, которое заканчивается на 2016, делится на 2016 и имеет сумму цифр, равную 2016.

7-7. На острове расположены несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами. Известно, что из любого города по этим дорогам можно проехать в любой другой. Туристы Педро и Базилио запланировали маршруты, каждый – свой и с разными начальными пунктами, так, чтобы проехать наибольшее возможное количество городов, причем в каждом городе побывать не более одного раза. Докажите, что обязательно найдется город, который посетили оба туриста.

8 класс

Продолжительность олимпиады – 4 часа

8-1. Таня заменила в произведении $S \cdot I \cdot P \cdot I \cdot \overline{US}$ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться результат, если известно, что он не равен нулю?

8-2. Группа одноклассников собиралась с поход. Дима немного опоздал, и учитель записал, во сколько раз увеличилась численность группы после прихода Димы. Еще через некоторое время пришел Саша, и учитель снова записал, во сколько раз увеличилась группа после прихода Саши. То же самое учитель сделал после прихода запоздавшего Леши, а уж после прихода Толика, который опоздал больше всех, учитель записал и четвертое число. Произведение четырех записанных чисел оказалось равным $4/3$. Сколько человек пошло в поход?

8-3. На продолжении стороны BC за точку C отмечена точка D такая, что $BC=CD$, а на продолжении стороны CA за точку A отмечена точка E такая, что $AE = 2AC$. Оказалось, что $DA = BE$. Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.

8-4. На листе бумаги выписаны $2k$ ($k>5$) целых подряд идущих чисел. Аня посчитала сумму всех четных выписанных чисел, а Боря – нечетных. Может ли сумма у Ани быть меньше, чем у Бори, при этом ровно в три раза?

8-5. На шахматной доске стояло несколько коней. Когда каждый из них сделал по одному ходу, расстояние между любыми двумя конями увеличилось. Какое наибольшее число коней могло быть?

8-6. Миллиардер Абрам Романович оставил наследство из нескольких яхт общей стоимостью 1 000 000 000 \$. Кроме того, оказалось, что, не пиля яхты, можно разделить всё поровну между 5 детьми от первого брака, а можно – между всеми 8 наследниками поровну. Какую наибольшую стоимость может иметь самая дешевая яхта?

8-7. Внутри (или на границе) квадрата со стороной 2 выбрали 5 точек. Какое наибольшее количество треугольников с вершинами в этих точках может иметь площадь, большую 1?

9 класс

Продолжительность олимпиады – 4 часа

9-1. Ваня заменил в произведении $S \cdot I \cdot P \cdot I \cdot \overline{US}$ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. На какую наибольшую степень шестерки может делиться результат, если известно, что он не равен нулю?

9-2. Петя и Вася по очереди красят клетки доски 30×30 . Изначально вся доска белая. Петя в свой ход красит одну любую непокрашенную клетку в черный цвет, а Вася в свой ход красит любые две непокрашенные клетки в красный цвет. Перекрашивать уже покрашенные клетки нельзя. Петя выигрывает, если по окончании игры появится черный уголок из трех клеток. Сможет ли Вася ему помешать?

9-3. Часовая, минутная и секундная стрелки часов имеют одинаковую длину. Часы пищат, если концы стрелок оказываются в вершинах прямоугольного треугольника. Какое наименьшее число пискнов могут издать часы в течение одного часа? Самое начало часа – 00 минут 00 секунд – принадлежит этому часу.

9-4. Могут ли одновременно при некотором действительном числе a быть целыми числа $a + \sqrt{15}$ и $\frac{1}{a - \sqrt{15}}$? Если нет, то докажите, если да, то найдите все такие числа a .

9.5. Основание AB трапеции $ABCD$ является диаметром окружности ω . Оказалось, что окружность ω касается прямой CD и проходит через середины боковых сторон. Найдите углы трапеции.

9-6. На листе бумаги выписаны несколько целых подряд идущих чисел. Аня посчитала сумму всех четных выписанных чисел, а Боря – нечетных. Может ли сумма у Бори быть больше, чем сумма у Ани, при этом ровно в три раза?

9-7. 40 членов жюри выбирали задачу на первое место для отборочной олимпиады из имеющегося списка тридцати задач. Была договоренность, что такой задачей может быть только такая задача, которую решила хотя бы половина членов жюри, но не все. Известно, что каждый решил ровно по 26 задач, причем у любых двух человек наборы решенных ими задач не совпали. Докажите, что среди задач есть хотя бы одна такая, которая может быть задачей на первое место.

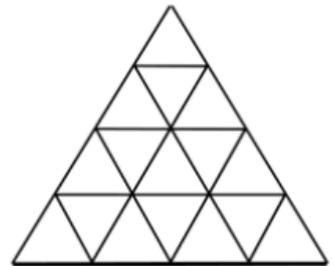
10 класс

Продолжительность олимпиады – 4 часа

10-1. Два коммерсанта делили прибыль. Первый подумал: если бы мне досталось на 40% больше денег, то доля второго уменьшилась бы на 60%. А как изменилась бы доля второго коммерсанта, если бы первый взял себе денег на 60% больше?

10-2. Обозначим через $H(n)$ произведение натурального числа n на сумму цифр этого же числа. Оказалось, что для некоторого шестизначного числа n число $H(H(n))$ тоже шестизначное. Найдите все такие n .

10-3. Можно ли клетки «треугольной» доски (см. рис.) раскрасить в 7 цветов так, чтобы для любых двух разных цветов нашлись две соседние (граничащие по стороне) клетки, окрашенные в эти цвета?



10-4. При каком минимальном n существует многочлен $P(x)$ степени n с рациональными коэффициентами, который положителен при всяком рациональном x , но имеет иррациональный корень?

10-5. Большой куб $99 \times 99 \times 99$ разбит на единичные кубики, после чего для каждого кубика подсчитано, на сколько кубиков он отстоит от нижней, от передней и от левой грани (например, для нижнего левого переднего кубика будут числа 1, 1, 1, а для центрального кубика задней грани будут числа 50, 99, 50). В каждый кубик записали сумму наибольшего и наименьшего из этих трех чисел. Чему равна сумма всех чисел в кубиках?

10-6. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Точка D лежит на стороне BC . Из точки D провели прямую, перпендикулярную OB , до пересечения со стороной AB в точке F . Аналогично из D провели прямую, перпендикулярную OC , до пересечения со стороной AC в точке E . Обозначим через K центр окружности, описанной около треугольника AFE . Докажите, что точки K, F, D, E лежат на одной окружности.

10-7. В пространстве отмечено 9 точек. Оказалось, что их можно параллельно спроектировать вдоль некоторой прямой на некоторую плоскость так, чтобы их проекциями оказались 3 точки, а можно (вдоль другой прямой и на другую плоскость) так, чтобы их проекциями оказались 4 точки. Можно ли утверждать, что исходные 9 точек лежат в одной плоскости?