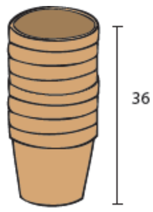
Образовательный центр «Сириус»

Финальный отборочный тур, 15.05 2016

Решения задач 6 класса

Задача 1. Восемь одинаковых ваз вставили друг в друга, и высота этой «башни» оказалась равна 36 см. А когда друг в друга вставили 16 ваз, то высота стала равна 60 см. Найдите высоту одной вазы.



Ответ: 15 см. ***Решение***. Высота пирамиды – это высота основания и ободка. Основание всегда одно, значит, 60–36 = 24 см составляет 8 ободков. Один ободок составляет 3 см. Тогда основание равно 36–8·3 = 36–24 = 12 см. Высота одной вазы 12+3 = 15 см.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Правильный ход решения с арифметическими ошибками – 5 баллов.

Задача 2. Трое старших детей в семье носят имена Катя, Саша и Женя. Оказалось, что у Кати братьев на два больше, чем сестер. У Саши братьев в три раза больше, чем сестер. Скажите, Женя – мальчик или девочка?

Ответ: Женя мальчик. ***Решение***. Так как Катя точно девочка, что всего мальчиков в семье на одного больше, чем девочек. Если бы Саша был мальчиком, то для него количество братьев и сестер было бы равно, но это не так. Значит, Саша – девочка. С одной стороны, у неё в это случае братьев на 2 больше, а известно, что их больше в три раза. Значит, братьев у неё трое, а сестра (это Катя) одна. Девочек в семье двое – это Катя и Саша. Значит, Женя – мальчик.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. Без обоснования полагается, что Саша – девочка, остальное верно – 2 балла. Без обоснования говорится, что в семье 2 девочки и три мальчика – 1 балл.

Задача 3. Депутаты образовали несколько комитетов. В каждом комитете не меньше двух членов, и каждые два комитета имеют как минимум одного общего депутата. Докажите, что можно раздать депутатам удостоверения трех разных цветов (каждому – ровно по одному удостоверению), чтобы в каждом комитете нашлись удостоверения минимум двух разных цветов.

Решение. Возьмем самый маленький по численности комитет А. Тогда нет комитета, который являлся бы его подмножеством. Дадим одному депутату из А удостоверение белого цвета, остальным депутатам из А – красного, а всем остальным, кто не входит в А – синего. Тогда в А есть два цвета – белый и красный. А любой другой комитет имеет общего депутата с А (красный или белый цвет) и имеет депутата, не входящего в А (синий цвет).

Критерии. Любой верный пример раскраски – 7 баллов. Если пример можно сделать правильным, добавив незначительные уточнения (например, возьмем НАИМЕНЬШИЙ по численности или по включению комитет) – 3 балла.

Задача 4. Докажите, что найдется такое простое число p, что число p–2016! является составным.

Решение. Пусть для любого простого числа p число p–2016! является простым. Но это означает, что расстояние между двумя ближайшими простыми никогда не превышает 2016!, т.е. нет 2016! подряд идущих составных чисел. С другой стороны, для любого натурального n есть отрезок натурального ряда из (n–1) подряд идущих составных чисел – $n!+2$, $n!+3$, $n!+4$…., $n!+n$ (для $k<n$ число $n!+k$ делится на k). значит, есть кусок и из 2016! подряд идущих составных чисел.

Критерии. Если без доказательства сказано, что существует сколь угодно большой отрезок натурального ряда без простых чисел – снимать 2 балла.

Задача 5. На доске 5×5 на каждой клетке лежала фишка. Каждую фишку переложил в клетку, отстоящую от неё по горизонтали или по вертикали на одну клетку. Какое наименьшее количество пустых клеток могло остаться после такого перекладывания?

Ответ: одна. ***Решение***. Оценка. Заметим, что фишки с клеток, помеченных 1, могут попасть только на клетки с 2, и наоборот. Так как клеток 1 всего 5, а клеток 2 – ровно 4, то минимум одна клетка останется пустой. Пример. На втором рисунке клетки с одинаковыми буквами обмениваются фишками. Нижняя правая клетка остается пустой (фишка из неё уходит в любое место, в неё ничего не приходит).

1		2		1
2		1		2
1		2		1

a	*b*	*a*	*b*	*l*
c	*d*	*c*	*d*	*t*
e	*f*	*e*	*f*	*l*
g	*h*	*g*	*h*	*t*
k	*n*	*k*	*n*	

Критерии. Оценка стоит 3 балла. Пример стоит 3 балла. Ответ без обоснования стоит 0 баллов.

Задача 6. Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2 и 3 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?

Ответ: за 2. ***Решение***. Сначала эксперт сравнит три монеты весом 3 г со всеми остальными. Ответ прибора «одинаково» означает, что в каждой группе монеты весят половину общего веса всех монет. Три монеты могут весить половину общего веса всех монет только если все они весят по 3 г. Затем эксперт сравнит три одиограммовых монеты с одной уже известной трёхграммовой. Равновесие доказывает, что все три монеты — действительно одиограммовые: иначе они вместе весили бы больше 3 г.

Что-то доказать за одно взвешивание можно только в случае, когда и на каждой чаше весов, и среди не лежащих на весах все монеты одного веса (иначе мы не сможем отличить две монеты разного веса, лежащие на одной чашке или не лежащие на весах). Но ясно, что при любом таком взвешивании одна из чашек перевесит, и мы ничего не узнаем.

Критерии. Алгоритм с обоснованием стоит 5 баллов. Алгоритм без пояснений и доказательств – 3 балла. Оценка, что за одно взвешивание невозможно справиться – 2 балла.

Решения задач 7 класса

Задача 1. Трое старших детей в семье носят имена Катя, Саша и Женя. Оказалось, что у Кати братьев на два больше, чем сестер. У Саши братьев в три раза больше, чем сестер. Скажите, Женя – мальчик или девочка?

Ответ: Женя мальчик. ***Решение***. Так как Катя точно девочка, что всего мальчиков в семье на одного больше, чем девочек. Если бы Саша был мальчиком, то для него количество братьев и сестер было бы равно, но это не так. Значит, Саша – девочка. С одной стороны, у неё в это случае братьев на 2 больше, а известно, что их больше в три раза. Значит, братьев у неё трое, а сестра (это Катя) одна. Девочек в семье двое – это Катя и Саша. Значит, Женя – мальчик.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. Без обоснования полагается, что Саша – девочка, остальное верно – 2 балла. Без обоснования говорится, что в семье 2 девочки и три мальчика – 1 балл.

Задача 2. Компания школьников решила купить пиццу. Каждая пицца порезана на 12 частей. Они подсчитали, что если каждый мальчик съест по 7 кусков, а каждая девочка – по 2 куска, то трех пицц не хватит. Если же купить четыре пиццы, то каждому мальчику хватит по 8 кусков, а каждой девочке – по 4 куска, и еще останется. Сколько мальчиков и сколько девочек в этой компании?

Ответ: 1 девочка и 5 мальчиков. ***Решение***. Обозначим количество мальчиков за m, а девочек – за d. Заметим, что $7m+2d > 36$, $8m+4d < 48$. Но $8m+4d$ – число, кратное 4, поэтому $8m+4d \le 44$, $4m+2d \le 22$. Вычитаем это из первого неравенства и получаем, что $3m > 14$, откуда $m \ge 5$. Но тогда из неравенства $4m+2d \le 22$ получаем, что $d \le 1$, откуда либо $d=0$, либо $d=1$. Если $d=0$, то $7m > 36$, $m > 5$, и $8m \le 44$, $m \le 5$, противоречие. Если $d = 1$, то $7m > 34$, $m \ge 5$, и $8m \le 40$, $m \le 5$, откуда $m=5$.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Если упущен случай $d = 0$, снимается 2 балл а(так как из текста задачи можно понять, что девочки есть). При неверной работе с неравенствами (из большего вычитается большее) – 0 баллов.

Задача 3. Докажите, что куб любого натурального числа, большего 1, может быть представлен как разность двух квадратов натуральных чисел.

Решение. Пусть $n^3 = a^2–b^2 = (a+b)(a–b)$. Попробуем решить уравнение $a+b = n^2$, $a–b = n$. Сложив эти два равенства, получаем, что $2a = n^2+n$, а вычтя, получаем, что $2b = n^2+n$. Отсюда $n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2$. В обоих скобках находятся натуральные числа, так как n^2 и n имеют одну четность.

Критерии. Если приведена формула без обоснования - 4 балла. Раскрытие скобок или иные понятные преобразования, доказывающие данное равенство, являются полным обоснованием.

Задача 4. На доске 5×5 на каждой клетке лежала фишка. Каждую фишку переложил в клетку, отстоящую от неё по горизонтали или по вертикали на одну клетку. Какое наибольшее количество пустых клеток могло остаться после такого перекладывания?

		3		
		3		
3	3	4	3	3
		3		
		3		

Ответ: 16 клеток. ***Решение***. Оценка. Чтобы осталось как можно больше клеток, надо, чтобы как можно больше фишек стояло на меньшем количестве клеток. Заметим, что 4 фишки могут собраться только на центральной клетке. По три фишки могут собраться только в клетках центрального креста. Тогда 25 = 4+3·7, то в таком случае должно хватить 8 клеток. Но это не так, как если бы было 8 клеток, то не должно быть клеток, где соберется две фишки. Теперь заметим, что фишки из угловых клеток могут прийти только в серые клетки. Чтобы в серой клетке оказалось три фишки, туда должна прийти еще центральная клетка, а она только одна. Таким образом, будет клетка, где соберутся

не более двух фишек, а значит, будет занято не менее 9 клеток, останется свободными более 16 клеток.

a	*b*	*c*	*d*	*e*
f	*l*	*g*	*k*	*f*
c	*d*	*a*	*b*	*c*
g	*k*	*f*	*l*	*g*
a	*b*	*c*	*d*	*e*

	k	*f*	*l*	
a	*b*	*c*	*d*	*e*
		g		

Пример. См рис. Те фишки, которые на левом рисунке обозначены буквой *a*, собираются в клетку а (на правом рисунке). Если описать кратко, то верхний и нижний ряд переходят в средний, средний перемешивается внутри себя (это возможно). Из второго и четвертого ряда фишки с края идут в центральную клетку той же строчки, центральные клетки меняются местами. С четвертой строчки две оставшиеся клетки идут наверх, а аналогичные клетки второй строчки меняются местами.

Критерии. Оценка стоит 3 балла. Пример стоит 3 балла. Оценка на 8 клеток стоит 1 балл.

Задача 5. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$) с углом $A < 60°$. Точка D на стороне AC такова, что $\angle DBC = \angle BAC$. Серединный перпендикуляр к BD пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC, в точке E. Докажите, что прямые EB и AC параллельны.

Решение. Пусть прямая, проходящая через точку B параллельно AC пересекается с прямой, проходящей через A параллельно BC, в точке F. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BDC = \angle BCD = 90°-\alpha$, откуда $\angle BDA = 90°+\alpha$. Далее, $\angle BAF = \angle ABC = 90°-\alpha$, откуда $\angle DAF = 90°+\alpha = \angle BDA$. Кроме того, $FA = BC = BD$. Таким образом, треугольники BDA и FAD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $FD = AB = AC = FB$, то есть точка F лежит на серединном перпендикуляре отрезка BD. Стало быть, $F = E$, откуда $EB = FB \,||\, AC$.

Критерии. Замечено, но не доказано, что треугольник BDF равен треугольнику ABC - не более 2 баллов.

Задача 6. Сумма цифр натурального числа a относится к сумме цифр числа $2a$, как 19 к 9. Докажите, что в десятичной записи числа a хотя бы 29 цифр.

Решение. Из условия следует, что сумма цифр числа $2a$ делится на 9. Поэтому на 9 делится и само число $2a$, а, следовательно, и число a, и сумма его цифр. Кроме того, сумма цифр числа a делится на 19. Значит, она делиться на 171. Пусть она равна $171n$. Если бы переносов через разряд при сложении «в столбик» $a+a$ не было, сумма цифр числа $2a$ равнялась бы $342n$. На самом деле она равняется $9\times171n/19 = 81n$. Таким образом, за счет переносов сумма цифр оказалась меньше на $261n$. При этом за счет каждого переноса сумма уменьшалась на 9. Значит переносов было $261n/9 = 29n$, откуда ясно, что разрядов у суммы не меньше 29.

Критерии. Доказано, что сумма цифр числа a делится на 171 – 1 балл. Упоминание факта, что при переносе из разряда в разряд мы теряем девятку, стоит 1 балл (можно суммировать с предыдущим критерием).

Решения задач 8 класса

Задача 1. Компания школьников решила купить пиццу. Каждая пицца порезана на 12 частей. Они подсчитали, что если каждый мальчик съест по 7 кусков, а каждая девочка – по 2 куска, то трех пицц не хватит. Если же купить четыре пиццы, то каждому мальчику хватит по 8 кусков, а каждой девочке – по 4 куска, и еще останется. Сколько мальчиков и сколько девочек в этой компании?

Ответ: 1 девочка и 5 мальчиков. ***Решение***. Обозначим количество мальчиков за m, а девочек – за d. Заметим, что $7m+2d > 36$, $8m+4d < 48$. Но $8m+4d$ – число, кратное 4, поэтому $8m+4d \le 44$, $4m+2d \le 22$. Вычитаем это из первого неравенства и получаем, что $3m > 14$, откуда $m \ge 5$. Но тогда из неравенства $4m+2d \le 22$ получаем, что $d \le 1$, откуда либо $d=0$, либо $d=1$. Если $d=0$, то $7m > 36$, $m > 5$, и $8m \le 44$, $m \le 5$, противоречие. Если $d = 1$, то $7m > 34$, $m \ge 5$, и $8m \le 40$, $m \le 5$, откуда $m=5$.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Если упущен случай $d = 0$, снимается 2 балл а(так как из текста задачи можно понять, что девочки есть). При неверной работе с неравенствами (из большего вычитается большее) – 0 баллов.

Задача 2. Известно, что n^3 можно представить как разность квадратов натуральных чисел ровно одним способом. Найдите все такие натуральные числа n.

Ответ: $n=2$. ***Решение***. Для любого натурального $n>1$ верен следующий способ: $n^3 = a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$. Пусть $a+b = n^2$, $a-b = n$, тогда, сложив эти два равенства, получаем, что $2a = n^2+n$, а вычтя, получаем, что $2b = n^2+n$. Отсюда $n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2$. Заметим, что если n нечетно, то можно сделать так $a+b = n^3$, $a-b = 1$, $n^3 = \left(\frac{n^3+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^3-1}{2}\right)^2$. Пусть n четно, $n = 2k$. Тогда еще один способ разложения можно получить из равенств $a+b = 4k^3$, $a-b = 2$, $8k^3 = (2k^3+1)^2 - (2k^3-1)^2$, и он не совпадет с первым из упомянутых. Этого нельзя сделать в том и только в том случае, когда $k=1$, то есть $n=2$.

Если же $n = 1$, то 1^3 вообще невозможно представить как разность квадратов натуральных чисел.

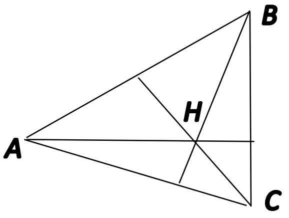
Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Если пропущен один из случаев (четный или нечетный) – не более 3 баллов.

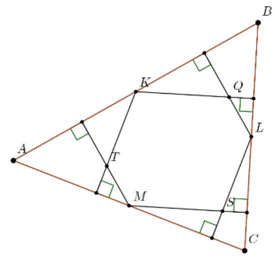
Задача 3. Из Сочи одновременно в одну сторону выехали две машины. Одна – со скоростью 80 км/ч, другая – со скоростью 90 км/ч. Через полчаса вслед за ними выехал болид «Формулы-1». Он обогнал эти машины с разностью в полчаса. Найдите скорость болида.

Ответ: 120км/ч. ***Решение***. Отставание болида от первой машины составляло 40 км, а от второй – 45 км. Обозначим скорость болида за v. Тогда он догонит первый болид за время $\frac{40}{v-80}$, а второй - $\frac{45}{v-90}$. Получаем уравнение $\frac{40}{v-80} + \frac{1}{2} = \frac{45}{v-90}$, откуда $\frac{v}{2(v-80)} = \frac{45}{v-90}$, $v(v-90) = 90\,(v-80)$, $v^2-180v+7200 = 0$. Решаем квадратное уравнение $D/2 = 8100 - 7200 = 900$. $v = 90 \pm 30$, это 60 км/ч или 120км/ч. При первом варианте болид никогда не догонит машину, поэтому ответ единственный. Правда, для болида скорость маловата, но это виноват горный серпантин.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. За арифметические ошибки при правильном ходе решения снимается 2 балла. Верно составленное, но не решенное уравнение – 4 балла.

Задача 4. На сторонах остроугольного треугольника *ABC* отмечены середины. Точка *K* – середина *AB*, точка *L* – середина *BC*, точка *M* – середина *AC*. Из отмеченных точек на стороны треугольника опущены перпендикуляры как показано на рис. Образовался шестиугольник *KQLSMT*. Найдите отношение его площади к площади треугольника *ABC*.





Ответ: 0,5. ***Решение***. Проведем все средние линии. Площадь срединного треугольника *KLM* составляет ¼ от S_{ABC}. Треугольники *KBL*, *LCM* и *MAK* подобны треугольнику *ABC* с коэффициентом 2. Рассмотрим треугольник *ABC*, проведем в нем высоты и обозначим ортоцентр через *H*. Заметим, например, что *Q* – ортоцентр треугольника *KBL*, поэтому треугольник *KQL* подобен *AHC* с коэффициентом 2. Аналогично, *LSM* подобен *BHA*, *MTK* подобен *CHB*. Треугольники *AHC*, *BHA*, *CHB* вместе составляют треугольник *ABC*, поэтому суммарная площадь треугольников *KQL*, *LSM*, *MTK* составляет 0,25 от S_{ABC}, а суммарная площадь шестиугольника составляет половину от площади треугольника.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Утверждение о том, что маленькие треугольники, получающиеся после проведения всех средних линий, подобны большому, и подобны все их элементы, считается известным фактом.

Задача 5. Страна состоит из двух больших островов, на каждом из которых расположено города. Всего в стране 99 городов. Авиарейсы летают только между островами, из каждого города выходит хотя бы один авиарейс, из любого города можно долететь в любой другой (возможно, с пересадками). Управление авиации перенумеровало города числами от 1 до 99 (нумерация является государственной тайной). Стоимость билета на авиарейс определяется как сумма номеров городов, соединенных этим авиарейсом. Докажите, что шпион, узнав стоимость всех авиарейсов, сможет узнать государственную тайну.

Решение. Есть двудольный связный граф на 99 вершинах, вершины перенумерованы числами от 1 до 99, на ребрах написаны суммы чисел. Заметим, что в доли не могут быть равными. Рассмотрим две вершины *A* и *B* такие, что от *A* до *B* можно добраться с одной пересадкой (допустим, с пересадкой в *C*). Тогда, зная суммы *A*+*C* и *B*+*C*, можно найти разность *A*–*B*. Действуя аналогично, можно найти разность любых таких вершин, значит, и разность всех вершин в одной доле, т.е. мы узнаем значение вершин в каждой доле с точностью до сдвига. Кроме того, мы знаем сумму хотя бы на одном ребре, знаем все разности между вершинами в одной доле, значит, можем узнать сумму на каждом ребре в ПОЛНОМ двудольном графе (даже если изначально он был неполный).

Если наименьшая и наибольшая вершина в какой-то доле имеет разницу 98, то они восстанавливаются однозначно, и тогда однозначно восстанавливается весь граф. Пусть теперь 1 может лежать как в первой доле, так и во второй. Обозначим разности в первой доле (красные вершины) как $\{0, a_1, a_2, \dots a_k\}$, а во второй (синие вершины) - $\{0, b_1, \dots, b_{99-k}\}$. Допустим, мы не можем отличить два варианта. Первый – когда 1 красная, тогда красные вершины $\{1, 1+a_1, 1+a_2, \dots, 1+a_k\}$, синие - $\{x, x+b_1, \dots, x+b_{99-k}\}$, где x – минимальное не-красное число. Рассмотрим сумму на минимальном ребре, она равна x+1. Второй вариант, когда 1 – синяя. Тогда красные вершины - $\{y, y+a_1, y+a_2, \dots, y+a_k\}$, синие - $\{1, 1+b_1, \dots, 1+b_{99-k}\}$, сумма на минимальном ребре y+1, а так как шпион не может отличить два варианта, то $x=y$. Значит, в красных и синих разностях сначала идет x–1 число подряд. Аналогично рассуждая от второй разности и так далее, легко получить, что набор $\{0, a_1, a_2, \dots a_k\}$ должен совпадать с набором $\{0, b_1, \dots, b_{99-k}\}$, что невозможно, так как в них не может быть поровну чисел.

Критерии. Идея о том, что можно восстановить все разности в одной доле, с обоснованием – 2 балла, без обоснования – 1 балл. Доказательство того, что можно полностью восстановить, если наибольшая и наименьшая вершина в одной доле – 3 балла. Утверждение, что можно узнать сумму на каждом ребре в полном графе – 1 балл (может суммироваться с другими).

Задача 6. Дан клетчатый квадрат $n \times n$. Какое наибольшее количество центров клеток можно отметить так, чтобы среди них не нашлось четырех, лежащих в вершинах параллелограмма?

Ответ: $2n-1$. ***Решение***. Пример. Отметим все центры клеточек в левом столбце и в верхней строке. Выберем любые 4 из них. Если выбран угол, то из всех 4 вершин какие-то три будут лежать на одной прямой, параллелограмма не получится. Если угол не выбран, то либо три лежат на одной прямой, либо две лежат в строке, а две – в столбце. Соединим между собой горизонтальную пару и вертикальную пару. Это не могут быть диагонали, так как они не пересекаются. Это не могут быть две противоположные стороны параллелограмма, так как они не параллельны.

Оценка. Пусть мы смогли отметить $2n$ клеток. Назовем столбцы буквами $a, b, c, \ldots, x$. Перенумеруем строчки сверху вниз от 1 до n. Обозначим за $a_1, a_2, \ldots, a_i$ номера строк сверху вниз, где стоят отмеченные клетки столбца a, затем за $b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_j$ – номера строк сверху вниз у отмеченных клеток столбца b и так далее. Заметим, что нумерация идет подряд. Получим ряд $a_1, a_2, \ldots, a_i, b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_j, c_{j+1}, \ldots, x_{2n}$. Докажем, что получится параллелограмм, у которого две стороны вертикальны. Это означает, что у него есть две пары вершин, одна пара находится в одном столбце, другая – в другом, а разности между ними должны быть одинаковы (например, $d_{k+1}-d_k = f_{l+1}-f_l$).

Рассмотрим ряд $a_1, a_2, \ldots, a_i, b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_j, c_{j+1}, \ldots, x_{2n}$, и рассмотрим в нем разности между соседними числами. Их $2n-1$, и не более чем $n-1$ из них – это разности между разными столбцами. Остается не менее n разностей. И все они должны быть различны. Но в силу построения ряда все эти разности положительны и не превышают $n-1$, поэтому среди них есть две одинаковых.

Критерии. Ответ без обоснования стоит 0 баллов. Пример без обоснования – 1 балл, пример с обоснованием – 2 балла. Оценка без примера стоит 4 балла, если есть оценка, приведен пример, но он не обоснован – 6 баллов.

Образовательный центр «Сириус»

Финальный отборочный тур, 15.05 2016

Решения задач 9 класса

Задача 1. Депутаты образовали несколько комитетов. В каждом комитете не меньше двух членов, и каждые два комитета имеют как минимум одного общего депутата. Докажите, что можно раздать депутатам удостоверения трех разных цветов (каждому – ровно по одному удостоверению), чтобы в каждом комитете нашлись удостоверения минимум двух разных цветов.

Решение. Возьмем самый маленький по численности комитет А. Тогда нет комитета, который являлся бы его подмножеством. Дадим одному депутату из А удостоверение белого цвета, остальным депутатам из А – красного, а всем остальным, кто не входит в А – синего. Тогда в А есть два цвета – белый и красный. А любой другой комитет имеет общего депутата с А (красный или белый цвет) и имеет депутата, не входящего в А (синий цвет).

Критерии. Любой верный пример раскраски – 7 баллов. Если пример можно сделать правильным, добавив незначительные уточнения (например, возьмем НАИМЕНЬШИЙ по численности или по включению комитет) – 3 балла.

Задача 2. Из Сочи одновременно в одну сторону выехали две машины. Одна – со скоростью 80 км/ч, другая – со скоростью 90 км/ч. Через полчаса вслед за ними выехал болид «Формулы-1». Он обогнал эти машины с разностью в полчаса. Найдите скорость болида.

Ответ: 120км/ч. ***Решение***. Отставание болида от первой машины составляло 40 км, а от второй – 45 км. Обозначим скорость болида за v. Тогда он догонит первый болид за время $\frac{40}{v-80}$, а второй - $\frac{45}{v-90}$. Получаем уравнение $\frac{40}{v-80}+\frac{1}{2}=\frac{45}{v-90}$, откуда $\frac{v}{2(v-80)}=\frac{45}{v-90}$, $v(v-90) = 90\ (v-80)$, $v^2-180v+7200 = 0$. Решаем квадратное уравнение $D/2$ = 8100 – 7200 = 900. $v = 90\pm30$, это 60 км/ч или 120км/ч. При первом варианте болид никогда не догонит машину, поэтому ответ единственный. Правда, для болида скорость маловата, но это виноват горный серпантин.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. За арифметические ошибки при правильном ходе решения снимается 2 балла. Верно составленное, но не решенное уравнение – 4 балла.

Задача 3. Докажите, что куб любого составного числа может быть представлен как разность двух квадратов натуральных чисел минимум тремя различными способами.

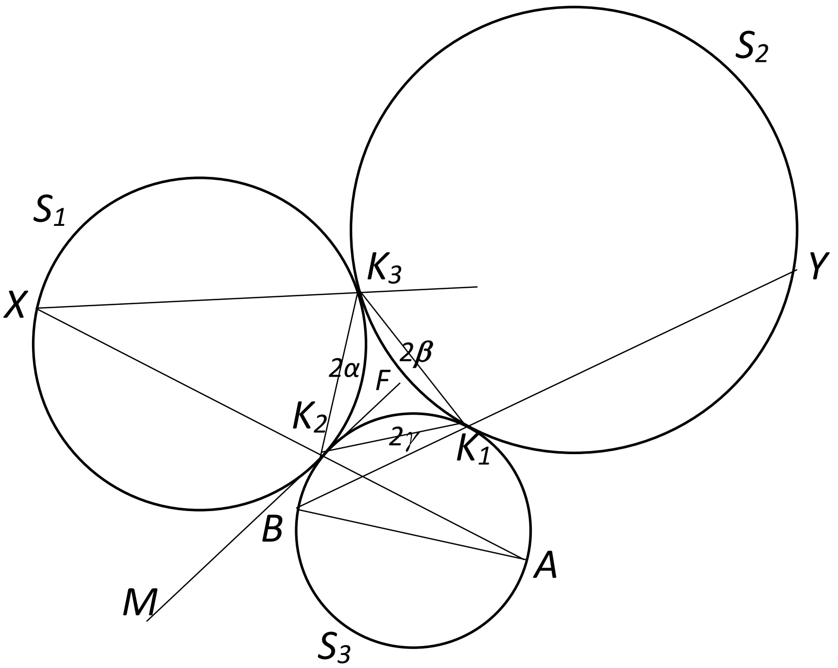
Решение. Для любого натурального n верен следующий способ. $n^3 = a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$. Пусть $a+b = n^2$, $a-b = n$, тогда, сложив эти два равенства, получаем, что $2a = n^2+n$, а вычтя, получаем, что $2b = n^2+n$. Отсюда $n^3=\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2-\left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2$. Заметим, что если n нечетно, то можно сделать так $a+b = n^3$, $a-b = 1$, $n^3=\left(\frac{n^3+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n^3-1}{2}\right)^2$. Кроме того, $n = km$, k и m оба нечетны, тогда $a+b = k^3$, $a-b = m^3$, $n^3=\left(\frac{k^3+m^3}{2}\right)^2-\left(\frac{k^3-m^3}{2}\right)^2$.Докажем, что все три способа – разные., так как в каждом способе сумма $a+b$ различная.

Пусть n четно, $n = 2k$. Тогда второй способ разложения можно получить из равенств $a+b = 4k^3$, $a-b = 2$, $8k^3=(2k^3+1)^2-(2k^3-1)^2$, а третий способ можно получить из равенств $a+b = 2k^3$, $a-b = 4$, $8k^3=(k^3+2)^2-(k^3-2)^2$. Все три способа различны по причину, указанной выше.

Критерии. Если предъявлено одно разложение – 1 балл. Если полностью разобран только один случай (то есть предъявлено три разложения в четном или в нечетном случае) – 3 балла. Если разложения предъявлены. Но не проверены ни в одном случае, снимается 1 балл.

Задача 4. Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга. Окружности S_1 и S_2 касаются в точке K_3, окружности S_1 и S_3 касаются в точке K_2, окружности S_2 и S_3 касаются в точке K_1. Пусть AB – диаметр окружности S_3, прямая AK_2 пересекает окружность S_1 в точке X, а прямая BK_1 пересекает окружность S_2 в точке Y. Докажите, что точки X, Y и K_3 лежат на одной прямой.

Решение. См. рис. Обозначим как на рисунке внутреннюю дугу K_1K_2 через 2γ, дугу K_1K_3 – через 2β, дугу K_2K_3 – через 2α. Проведем общую касательную к S_1 и S_3, обозначив её MF (F лежит внутри ограниченной тремя окружностями области). Тогда $\angle K_3K_2K_1 = ½\ (\overset{\smile}{K_2K_3} + \overset{\smile}{K_2K_1}) = \alpha+\gamma$. Аналогично $\angle K_2K_3K_1 = \alpha+\beta$, $\angle K_2K_1K_3 = \beta+\gamma$, откуда $2\alpha+2\beta+2\gamma = 180°$, $\alpha+\beta+\gamma = 90°$. Найдем $\angle XK_3K_2$ из соответствующего треугольника. В нем $\angle K_3XK2 = \alpha$, $\angle XK_2K_3 = 180°-\angle K_3K_2K_1-\angle K_1K_2A = 180°-\alpha-\gamma-½\overset{\smile}{K_1A}$. Тогда $\angle XK_3K_2 = 180°-\alpha-(180°-\alpha-\gamma-½\overset{\smile}{K_1A}) = \gamma+½\overset{\smile}{K_1A}$. Из аналогичных соображений $\angle YK_3K_1 = \gamma+½\overset{\smile}{K_2B}$. Тогда $\angle XK_2K_3 + \angle K_2K_3K_1 + \angle YK_3K_1 = \gamma+½\overset{\smile}{K_1A} + \alpha+\beta+ \gamma+½\overset{\smile}{K_2B}$ $= \gamma+½\ (\overset{\smile}{K_1A} + \overset{\smile}{K_2B})+90°$. Учитывая, что AB – диаметр, получаем, что $\angle XK_3Y = 180°$, т.е. точки X, Y, K_3 лежат на одной прямой.



Вышеприведенное решение учитывает, что точки A и B лежат так, как показано на рисунке. В то же время решение дословно переписывается в направленных углах для любого другого расположения точек. Это не было сделано для того, чтобы решения было понятно и тем, кто не знаком со счетом в направленных углах.

Критерии. Любое решение, не являющееся специальным случаем (когда какие-то две точки совпадают) со счетом углов, который можно записать в направленных углах, без упоминаний, что бывают другие случаи расположения точек – 6 баллов. Если нарисованы другие случаи или иным образом описано их существование – 7 баллов.

Задача 5. Дан клетчатый квадрат $n\times n$. Какое наибольшее количество центров клеток можно отметить так, чтобы среди них не нашлось четырех, лежащих в вершинах параллелограмма?

Ответ: $2n-1$. ***Решение***. Пример. Отметим все центры клеточек в левом столбце и в верхней строке. Выберем любые 4 из них. Если выбран угол, то из всех 4 вершин какие-то три будут лежать на одной прямой, параллелограмма не получится. Если угол не выбран, то либо три лежат на одной прямой, либо две лежат в строке, а две – в столбце. Соединим между собой горизонтальную пару и вертикальную пару. Это не могут быть диагонали, так как они не пересекаются. Это не могут быть две противоположные стороны параллелограмма, так как они не параллельны.

Оценка. Пусть мы смогли отметить $2n$ клеток. Назовем столбцы буквами a, b, c, …, x. Перенумеруем строчки сверху вниз от 1 до n. Обозначим за a_1, a_2, …, a_i номера строк сверху вниз, где стоят отмеченные клетки столбца a, затем за b_{i+1}, b_{i+2}, …, b_j – номера строк сверху вниз у отмеченных клеток столбца b и так далее. Заметим, что нумерация идет подряд. Получим ряд a_1, a_2, …, a_i, b_{i+1}, b_{i+2}, …, b_j, c_{j+1}, …, x_{2n}. Докажем, что получится параллелограмм, у которого две стороны вертикальны. Это означает, что у него есть две пары вершин, одна пара находится в одном столбце, другая – в другом, а разности между ними должны быть одинаковы (например, $d_{k+1}-d_k = f_{l+1}-f_l$).

Рассмотрим ряд a_1, a_2, …, a_i, b_{i+1}, b_{i+2}, …, b_j, c_{j+1}, …, x_{2n}, и рассмотрим в нем разности между соседними числами. Их $2n-1$, и не более чем $n-1$ из них – это разности между разными столбцами. Остается не менее n разностей. И все они должны быть различны. Но в силу построения ряда все эти разности положительны и не превышают n–1, поэтому среди них есть две одинаковых.

Критерии. Ответ без обоснования стоит 0 баллов. Пример без обоснования – 1 балл, пример с обоснованием – 2 балла. Оценка без примера стоит 4 балла, если есть оценка, приведен пример, но он не обоснован – 6 баллов.

Задача 6. Последовательность $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}+\frac{1}{x_n}}{2}$ периодична. Докажите, что $ab = 1$.

Решение. Умножим наше равенство на $2x_n$, получим, что $2x_{n+1}x_n = x_nx_{n-1}+1$, откуда $2(x_{n+1}x_n - 1) = x_nx_{n-1}-1$ (*). Обозначим $y_n = x_nx_{n-1}-1$. Так как последовательность (x_n) периодична, то и последовательность (y_n) должна быть периодична. С другой стороны, из (*) получаем $y_{n+1} = 0{,}5y_n$, то есть (y_n) –геометрическая прогрессия, и может быть периодичной только если все её члены равны 0. Рассмотрим первый член ab–1=0 и получим требуемое.

Критерии. Особых критериев нет. Рассмотрение частных случаев – 0 баллов.

Образовательный центр «Сириус»

Финальный отборочный тур, 15.05 2016

Решения задач 10 класса

Задача 1. Сравните, какое из чисел больше $A=\frac{1}{2015}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015})$ или $B=\frac{1}{2016}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2016})$

Ответ: *A>B.* ***Решение***. Рассмотрим разность *A*–*B* = $\frac{1}{2015}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015}\right)-\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015}\right)-\frac{1}{2016}\cdot\frac{1}{2016}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015}\right)\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)-\frac{1}{2016^2}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015}\right)\cdot\frac{1}{2015\cdot2016}-\frac{1}{2016^2}$. Заметим, что первая скобка больше 1, а $\frac{1}{2015\cdot2016}>\frac{1}{2016^2}$, откуда получаем, что *A*–*B* > 0.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. Если есть ошибки в преобразованиях выражений, то за работу ставится не более 3 баллов.

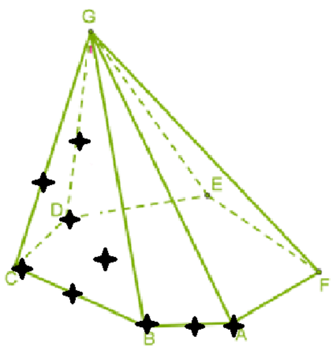
Задача 2. Из Сочи одновременно в одну сторону выехали две машины. Одна – со скоростью 80 км/ч, другая – со скоростью 90 км/ч. Через полчаса вслед за ними выехал болид «Формулы-1». Он обогнал эти машины с разностью в полчаса. Найдите скорость болида.

Ответ: 120км/ч. ***Решение***. Отставание болида от первой машины составляло 40 км, а от второй – 45 км. Обозначим скорость болида за *v*. Тогда он догонит первый болид за время $\frac{40}{v-80}$, а второй - $\frac{45}{v-90}$. Получаем уравнение $\frac{40}{v-80}+\frac{1}{2}=\frac{45}{v-90}$, откуда $\frac{v}{2(v-80)}=\frac{45}{v-90}$, $v(v-90) = 90(v-80)$, $v^2-180v+7200 = 0$. Решаем квадратное уравнение *D*/2 = 8100 – 7200 = 900. $v = 90\pm30$, это 60 км/ч или 120км/ч. При первом варианте болид никогда не догонит машину, поэтому ответ единственный. Правда, для болида скорость маловата, но это виноват горный серпантин.

Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. За арифметические ошибки при правильном ходе решения снимается 2 балла. Верно составленное, но не решенное уравнение – 4 балла.

Задача 3. Какое наименьшее количество точек надо отметить на поверхности шестиугольной пирамиды так, чтобы на каждой грани находилось разное число отмеченных точек?

Ответ: п. ***Решение***. Оценка. Будем считать число вхождений точек. Так как граней 7, то минимальное число вхождений точек будет равно 0+1+…+6 = 21. Допустим, точка находится в верхней вершине пирамиды. Тогда она дает 6 вхождений. Если на основании точек нет, то в других вершинах точек быть не может, остальные точки только на гранях и дают не больше 2 вхождений. Тогда общее количество точек не меньше, чем $\lceil(21-6):2\rceil+1=9$ точек ($\lceil\quad\rceil$ - округление до целого вверх). Если на основании точки есть, то нулевых граней нет совсем, минимальное число вхождений тогда равно 1+2+…+7 = 28, а общее количество точек не меньше, чем $\lceil(28-6):3\rceil+1=9$ точек (делим на 3, так как точки могут лежать в вершинах на основании).



Пусть в верхней вершине точки нет. Если есть нулевая грань, то из вершин основания может быть отмечено не более 4, они дадут не более 12 вхождений. Тогда нам потребуется не менее $\lceil(21-12):2\rceil+4=9$ точек. Если нулевой грани нет, то необходимо не менее 28 вхождений. На вершины нижней грани придется не более 3·6 = 18 вхождений, на остальные необходимо не менее 5 точек, всего точек уже 11.

Пример на 9 точек см. рис. Отмечаем вершины *A*, *B*, *C*, *D*. Ставим по одной точек на ребра *CG*, *DG*, *AB*, *BC* и одну точку на грань *BGC*. Грань *EFG* – 0, *FAG* – 1, *ABG* – 3, *BCG* – 5, *DCG* – 4, *DEG* – 2, *ABCDEF* – 6.

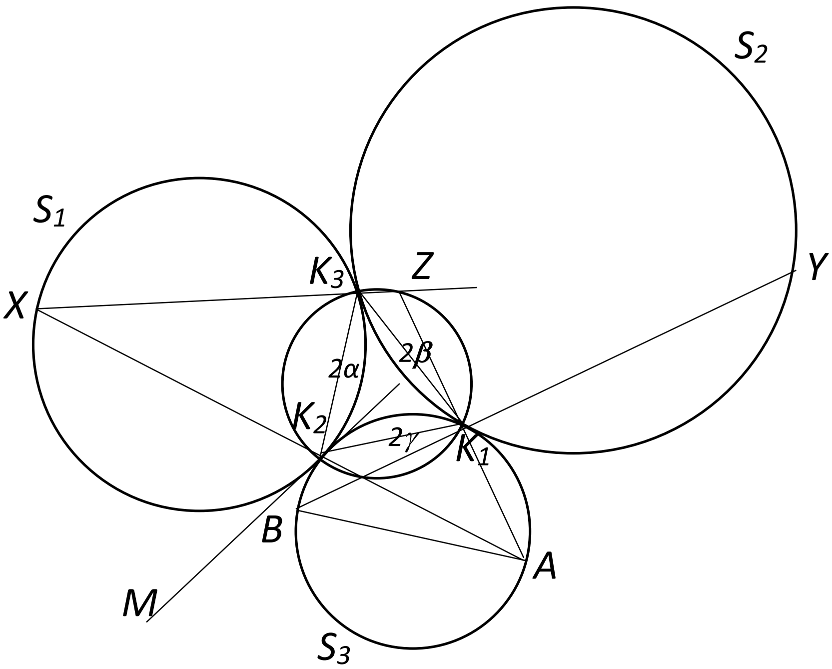
Критерии. Ответ без обоснования – 1 балл. Ответ с примером – 2 балла. Оценка стоит 4 балла, из которых2 балла стоит случай, когда в верхней вершине есть точка, а 2 балла случай, когда в верхняя вершина не отмечена.

Задача 4. Известно, что для некоторых натуральных чисел a, b число a^4+a^3+1 нацело делится на $a^2b^2+ab^2+1$. Найдите, чему равна разность $a–b$.

Ответ:** <u>$a–b = 0$.</u>* ***Решение. Пусть $a^4+a^3+1 = k(a^2b^2+ab^2+1)$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда $a^2(a^2–kb^2)+a(a^2–kb^2) = a(a+1)(a^2–kb^2) = k–1 \ge 0$. Если $k = 1$, то $a^2–kb^2 = 0$, $a^2 = b^2$, $a=b$, $a–b = 0$. Если $k>1$, то с одной стороны $a^2–kb^2 \ge 1$, $a^2 > kb^2 > k$. С другой стороны, $k \ge a(a+1) > a^2$. Противоречие.

<u>Критерии</u>. Ответ без обоснования – 0 баллов. Если есть разложение на множители, ведущее к успеху, но дальнейшие рассуждения не приведены или приведены неверно – 2 балла.

Задача 5. Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга. Окружности S_1 и S_2 касаются в точке K_3, окружности S_1 и S_3 касаются в точке K_2, окружности S_2 и S_3 касаются в точке K_1. Пусть AB – диаметр окружности S_3, прямая AK_2 пересекает окружность S_1 в точке X, прямая BK_1 пересекает окружность S_2 в точке Y. Докажите, что прямые AK_1 и BK_2 пересекаются на прямой XY.



Решение. См. рис. Обозначим как на рисунке внутреннюю дугу K_1K_2 через 2γ, дугу K_1K_3 – через 2β, дугу K_2K_3 – через 2α. Проведем общую касательную к S_1 и S_3, обозначив её MF (F лежит внутри ограниченной тремя окружностями области). Тогда $\angle K_3K_2K_1 = ½(\overset{\frown}{K_2K_3} + \overset{\frown}{K_2K_1}) = \alpha+\gamma$. Аналогично $\angle K_2K_3K_1 = \alpha+\beta$, $\angle K_2K_1K_3 = \beta+\gamma$, откуда $2\alpha+2\beta+2\gamma = 180°$, $\alpha+\beta+\gamma = 90°$. Найдем $\angle XK_3K_2$ из соответствующего треугольника. В нем $\angle K_3XK2 = \alpha$, $\angle XK_2K_3 = 180°–\angle K_3K_2K_1–\angle K_1K_2A = 180°–\alpha–\gamma–½\overset{\frown}{K_1A}$. Тогда $\angle XK_3K_2 = 180°–\alpha–(180°–\alpha–\gamma–½\overset{\frown}{K_1A}) = \gamma+½\overset{\frown}{K_1A}$. Из аналогичных соображений $\angle YK_3K_1 = \gamma+½\overset{\frown}{K_2B}$. Тогда $\angle XK_2K_3 +\angle K_2K_3K_1 + \angle YK_3K_1 = \gamma+½\overset{\frown}{K_1A} +\alpha+\beta+ \gamma+½\overset{\frown}{K_2B} = \gamma+½ (\overset{\frown}{K_1A} + \overset{\frown}{K_2B})+90°$. Учитывая, что AB – диаметр, получаем, что $\angle XK_3Y =180°$, т.е. точки X, Y, K_3 лежат на одной прямой.

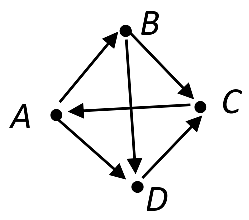
Пусть теперь прямая XY пересекает окружность, описанную около треугольнике $K_1K_2K_3$, в точке Z. $\angle K_3K_1Z = 180°–\angle ZK_3K_1–\angle K_3ZK_1 = 180°– \gamma–½\overset{\frown}{K_2B}–(180°–\angle K_3K_2K_1) = 180°– \gamma–½\overset{\frown}{K_2B}–(180°–\alpha–\gamma) = \alpha –½\overset{\frown}{K_2B}$. $\angle K_2K_1A = 90°+½\overset{\frown}{K_2B}$. Тогда $\angle ZK_1K_3+\angle K_3K_1K_2+\angle K_2K_1A = \alpha –½\overset{\frown}{K_2B} +\beta+\gamma+90°+½\overset{\frown}{K_2B} = 90°+\alpha+\beta+\gamma = 180°$, то есть точки A, K_1 и Z лежат на одной прямой. Аналогично доказывается, что точки B, K_2 и Z лежат на одной прямой, а значит, прямые AK_1 и BK_2 пересекаются на прямой XY в точке Z.

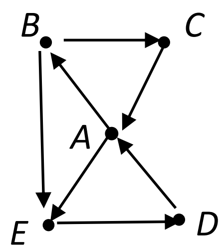
Вышеприведенное решение учитывает, что точки A и B лежат так, как показано на рисунке. В то же время решение дословно переписывается в направленных углах для любого другого расположения точек. Это не было сделано для того, чтобы решения было понятно и тем, кто не знаком со счетом в направленных углах.

<u>Критерии</u>. Любое решение, не являющееся специальным случаем (когда какие-то две точки совпадают) со счетом углов, который можно записать в направленных углах, без упоминаний, что бывают другие случаи расположения точек – 6 баллов. Если нарисованы другие случаи или иным образом описано их существование – 7 баллов.

Задача 6. 100 команд сыграли в волейбольный турнир (ничьих не бывает), каждая с каждой ровно по одному разу. Оказалось, что в этом турнире не существует цикла из четырех команд (то есть не существует таких четырех различных команд A, B, C и D, что A выиграла у B, B выиграла у C, C выиграла у D, D выиграла у A). Найдите наибольшее возможное количество циклов из трех команд в этом турнире.

Ответ: $\left[\frac{n}{3}\right]$. ***Решение***. Будем ставить стрелку от A к B, если команда A победила команду B. Получится полный ориентированный граф. <u>Оценка.</u> Заметим, что два разных цикла из трех команд не могут пересекаться. Если они пересекаются по двум вершинам (см. рис. 1), то без ограничения общности можно считать, что стрелка ведет из B в D (иначе меняем их местами), тогда получаем цикл $A \to B \to D \to C \to A$. Если же два цикла пересекаются по одной вершине, то аналогично без ограничения общности можно считать, что стрелка ведет из B в E, получаем цикл $A \to B \to E \to D \to A$. Таким образом, каждая вершина участвует не более чем в одном цикле из трех вершин.





Пример. Перенумеруем все вершины графа A_1, A_2, A_3, …., A_n. Поставим стрелки от больших вершин к меньшим, кроме стрелок $A_{3k-2} \to A_{3k}$, $3k \le n$. Тогда циклы из трех вершин будут иметь вид $A_{3k} \to A_{3k-1} \to A_{3k-2} \to A_{3k}$ для каждого k. Допустим, что есть цикл другого вида, найдем в нем вершину с наибольшим номером. В неё входит стрелка из данного цикла, т.е. из вершины с меньшим номером, тогда это обязательно стрелка вида $A_{3i-2} \to A_{3i}$. Но тогда больше «исключительных» стрелок, в которых участвуют эти вершины, нет, и оставшаяся вершина должна иметь номер меньше, чем $3i$ и больше, чем $3i-2$, это может быть только вершина A_{3i-1}, и цикл совпадает с вышеприведенными.

<u>Критерии</u>. Ответ без обоснования стоит 0 баллов. Оценка стоит 3 балла. Если в оценке пропущен один из случаев (пересечение по одной или по двум вершинам), снимается 2 балла. На самом деле, эти случаи аналогичны (если на втором рисунке считать вершины C и D одной), но это необходимо так или иначе упомянуть. Пример стоит 3 балла. Если пример описан, но не доказано, почему он верен (например, не доказано, почему там нет никаких других тройных циклов), снимается 2 балла.