

Образовательный центр «Сириус»
Южная математическая смена
Основной тур. 8.11.2015
7 класс

1. В столовой 10 грецких орехов можно поменять на 3 пирожка, а один пирожок на 3 грецких ореха и 10 рублей. Сколько стоит пирожок? Ответ обоснуйте.

Решение.

Три пирожка стоят 9 орехов и 30 рублей. Но по условию задачи столько же стоят 10 орехов. Таким образом, 9 орехов и 30 рублей стоят столько же, сколько 10 орехов. Значит, орех стоит 30 рублей, а пирожок — $3 \cdot 30 + 10 = 100$ рублей.

2. Произведение двух взаимно простых натуральных чисел равно 1000. Чему может равняться их сумма? Найдите все возможные ответы. Числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

Ответ. 133 и 1001. **Решение.**

$1000 = 2^3 \cdot 5^3$, значит, каждое из наших чисел в своём разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. При этом двойки не могут присутствовать в разложении обоих чисел, иначе числа не будут взаимно простыми. Аналогично, и пятёрки не могут присутствовать в разложении обоих чисел. Следовательно, возможны два случая: 1) одно из чисел равно 2^3 , а другое — 5^3 , что даст в сумме $8+125=133$; 2) и 2^3 , и 5^3 входят в одно число, что даст в сумме $1000+1=1001$.

3. В сказочной стране живут только гномы, которые всегда говорят правду, и тролли, которые всегда лгут. Как-то раз собрались на полянке 5 жителей страны. Каждый заявил остальным: «Вы все – тролли!» Сколько троллей могло быть среди собравшихся? Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему нет других.

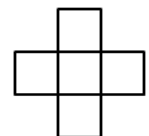
Ответ. 4. **Решение.**

Для начала заметим, что на полянке не может быть двух или большего количества гномов – если бы гномов было хотя бы двое, то любой из них своим высказыванием «Вы все – тролли!» называл бы троллем и всех остальных гномов, то есть говорил бы неправду. Поэтому гномов на полянке не больше одного.

Теперь заметим, что должен быть хотя бы один гном. Действительно, если бы все были троллями, то каждый из них (когда говорил «Вы все – тролли!») сказал бы правду, а тролли такого сказать не могут.

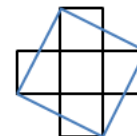
Таким образом, гном точно должен быть, причём только один, тогда остальные 4 жителя должны быть троллями. Осталось только заметить, что это вариант подходит (единственный гном справедливо называет остальных троллями, а каждый из троллей называет троллем в том числе и единственного гнома, поэтому говорит неправду).

4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на 5 частей, из которых можно сложить квадрат.



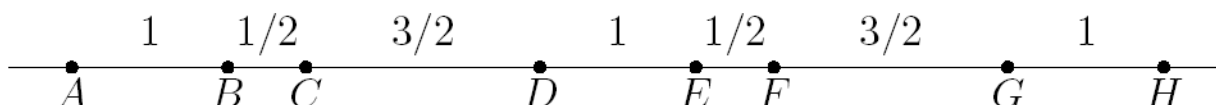
Решение.

Каждый отрезаемый прямоугольный треугольник укладывается на «соседнее» место. Это факт доказывается тем, что соответствующие прямоугольные треугольники («отрезаемый» и «место» равны по катету и острому углу).



5. Халк во время тренировки расставляет на прямой линии несколько мячей и вычисляет расстояния между центрами каждой двух из них (например, для четырёх мячей таких расстояний будет шесть). Помогите Халку расставить на прямой линии восемь мячей так, чтобы расстояние между крайним левым и крайним правым мячами было равно 7, а среди расстояний между мячами ровно три раза встречалось расстояние 1, ровно два раза – расстояние 2, ровно пять раз – расстояние 3.

Решение.



Пусть A, B, C, D, E, F, G, H – подряд идущие центры мячей. Подходит, в частности, следующий пример: $AB = 1, BC = \frac{1}{2}, CD = \frac{3}{2}, DE = 1, EF = \frac{1}{2}, FG = \frac{3}{2}, GH = 1$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

6. Слева и сверху от таблицы 4×4 поставлены четыре различных натуральных числа a, b, c, d , а в клетки записаны 16 чисел – их суммы (число в каждой клетке равно сумме числа, стоящего над столбцом с этой клеткой и числа, стоящего слева от строки с этой клеткой, например, число стоящее в правой нижней клетке равно $d + d$). Какое наибольшее количество из 16 чисел, записанных в таблицу, могли оказаться простыми?

Ответ. 9 чисел. **Решение.**

Рассмотрим несколько случаев.

Если все четыре числа a, b, c, d четные или все четыре нечетные, то в таблице стоит 16 четных чисел.

Если три числа из a, b, c, d четные, а одно нечетное, или три нечетные, а одно четное, то в таблице стоит 10 четных чисел. Если два числа из a, b, c, d четные, а два нечетные, то в таблице стоит 8 четных чисел.

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

Поэтому в любом случае в таблице не менее 8 четных чисел. Из четных чисел не более одного может быть простым (так как $1 + 1 = 2$, а большие четные числа – составные). Поэтому в таблице не менее 7 составных чисел. Значит, в таблице не более 9 простых чисел.

Если, например, $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$, то в таблице будет 9 простых чисел: одна двойка, по два числа 3, 7 и четыре пятерки.