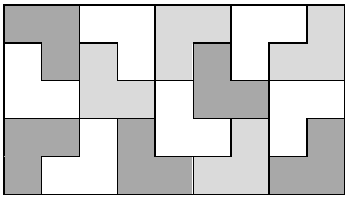
Образовательный центр «Сириус»
Южная математическая смена
Основной тур. 8.11.2015
8 класс

1. Как клетчатый прямоугольник 5×9 разрезать на уголки из трёх клеток?

Решение.

Пример на рисунке. Есть и другие примеры.



2. Докажите, что если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, то $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$.

Решение.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow b^2=ac,\ a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$. Тогда $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+ac}{ac+c^2}=\frac{a(a+c)}{c(a+c)}=\frac{a}{c}$.

Если $a+c=0\Leftrightarrow a=-c\Rightarrow b^2=-c^2$, что возможно только при $b=c=0$. Противоречие.

3. Аскер задумал трёхзначное число. Если из этого числа вычесть сумму его цифр, то получится 333. Какое число мог задумать Аскер? Найдите все варианты и обоснуйте, почему нет других.

Ответ. Аскер мог задумать любое число от 340 до 349 (включительно). **Решение.**

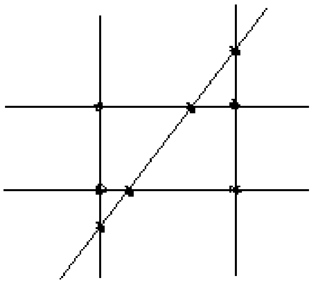
Задуманное число точно больше 300 (иначе при вычитании суммы цифр получится результат, меньший 300), но меньше 400 (если число больше 400, а сумма цифр у трёхзначного числа не больше 27, то при вычитании получится как минимум 400 – 27 = 373, а это уже больше 333). Но тогда первая цифра числа равна 3.

Трёхзначное число, начинающееся на 3 имеет вид $\overline{3bc}$, то есть 300 + 10b + c. По условию задачи имеем: 300 + 10b + c – (3 + b + c) = 333. Отсюда 9b = 36, а тогда b = 4. Итак, мы знаем первые две цифры числа (3 и 4 соответственно), а третья цифра может быть любой (при вычитании из числа суммы его цифр последняя цифра просто сокращается). Стало быть, подходит любое трёхзначное число, начинающееся на 34, – то есть, Аскер мог задумать любое натуральное число от 340 до 349 включительно.

4. На плоскости провели несколько прямых так, что никакие три из них не проходят через одну точку и получено ровно восемь точек их попарного пересечения. Какое наименьшее количество прямых могло быть проведено?

Ответ. Пять прямых. **Решение.**

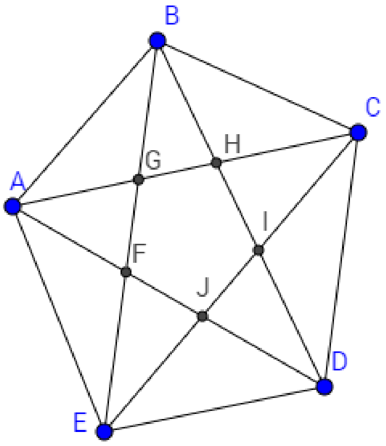
Если n прямых расположены так, что любые две пересекаются и точки пересечения различны, то общее количество точек пересечения равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Для $n=4$ это число равно 6, поэтому необходимо провести не менее пяти прямых (если какие-то прямые не пересекаются, то количество точек попарного пересечения еще меньше).



Пять прямых можно расположить указанным образом. Один из возможных примеров – см. рис (на чертеже есть две пары параллельных прямых).

5. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором сумма длин всех его сторон не меньше суммы длин всех диагоналей?

Ответ. Нет. **Решение.**



Напишем пять неравенств вида $AB < AG + GB$ для треугольников ABG, BCH, CDI, DEJ, EAF. Сложив указанные пять неравенств, получим $AB + BC + CD + DE + EA < AG + HC + BG + FE + BH + ID + AF + JD + CI + JE$. Отсюда понятно, что периметр пятиугольника меньше суммы его диагоналей.

6. На столе стоят 11 копилок, первоначально пустых. Два игрока ходят по очереди. Ход состоит в том, чтобы выбрать произвольные 10 копилок и положить по одному рублю в каждую из них. Выигрывает тот, после чьего хода впервые в какой-то копилке окажется 20 рублей. Кто выигрывает при правильной игре? Ответ обоснуйте.

Ответ. Второй. **Решение.**

Выигрывает второй. Каждым ходом он кладет рубли в те же копилки, что и первый.

После каждого хода второго во всех копилках находится четное число монет. Поэтому после хода первого появится только нечетное число монет, то есть 20 появиться не может. Так как общее число монет растет, то второй когда-нибудь получит 20 монет.