Конкурс по математике. Ответы и примерные решения

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешается, решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

1. (6–7) Один торговец продает сливы по 150 рублей за килограмм, а второй — по 100 рублей. Но у первого косточка занимает треть веса каждой сливы, а у второго — половину. Чьи сливы выгоднее покупать?

Ответ. Сливы второго торговца.

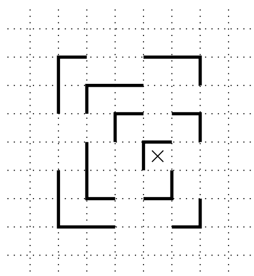
Решение. Сравним цену мякоти слив.

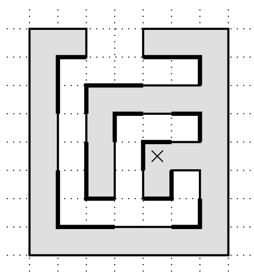
Первый торговец продает $1 - {}^1\!/_3 = {}^2\!/_3$ килограмма мякоти за 150 рублей — т. е. мякоть у него стоит $150 : {}^2\!/_3 = 225$ руб. за кг. А у второго торговца цена мякоти 100 руб. за полкило — т. е. 200 руб. за кг.

Таким образом, килограмм мякоти у второго торговца дешевле, то есть покупать сливы выгоднее у него.

2. (6–8) Внутри забора, представляющего собой замкнутую несамопересекающуюся ломаную, заперт тигр. На рисунке видна только часть забора (положение тигра показано крестиком). Нарисуйте, как мог бы выглядеть весь забор (забор может идти только по линиям сетки).

▷ Напомним, что ломаная — это последовательность отрезков (“звеньев”), такая что начало следующего отрезка совпадает с концом предыдущего; замкнутая ломаная — ломаная, в которой конец последнего отрезка совпадает с началом первого.





Решение. Одно из решений приведено на рисунке справа (серым цветом выделена внутренность ломаной). Есть и много других.

3. (6–11) Бабе-Яге подарили большие песочные часы на 5 минут и маленькие — на 2 минуты. Зелье должно непрерывно кипеть ровно 8 минут. Когда оно закипело, весь песок в больших часах находился в нижней половине, а в маленьких — какая-то (неизвестная) часть песка в верхней, а остальная часть — в нижней половине. Помогите Бабе-Яге отмерить ровно 8 минут.

(Песок все время сыплется с постоянной скоростью. На переворачивание время не тратится.)

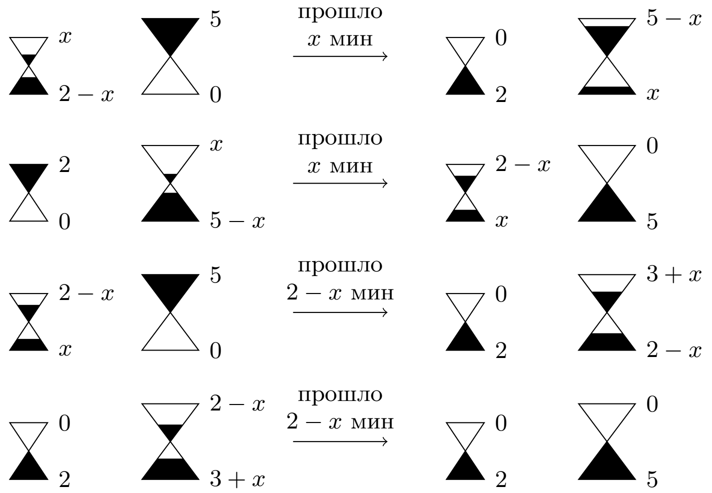
Решение. Пусть в начале в верхней половине маленьких часов было песка на x минут.

1. Сразу перевернем большие часы.

2. Перевернем и те и другие часы.

3. Перевернем большие часы.

4. Снова перевернем большие часы.



С начала процесса прошло $x + x + (2 - x) + (2 - x) = 4$ минуты, а песок в обоих часах весь в нижней половине. Остается отмерить 4 минуты — это легко сделать при помощи 2-минутных часов.

▷ Решение не единственно. Но можно показать, что в любом решении необходимо сразу запустить большие часы.

4. (8–9) На дверце сейфа написано произведение степеней $a^n b^m c^k$. Чтобы дверца открылась, надо заменить каждую из шести букв натуральным числом так, чтобы в произведении получился куб натурального числа. Пи́нки, не подумав, уже заменил какие-то три буквы числами. Всегда ли Брейн сможет заменить три оставшиеся, чтобы дверца открылась?

Ответ. Всегда.

Решение. Разберем два случая.

I. Если Пинки заменил в каждой из трех степеней только одну из букв, то Брейн может просто сделать каждый из трех сомножителей полным кубом. Действительно, если в выражении вида x^y заменена только одна буква, то выбором оставшейся легко сделать его полным кубом (для этого можно либо x заменить на полный куб, либо y на число, кратное трем).

II. Пусть в каком-то из трех множителей Пинки заменил обе буквы. Тогда в каком-то из множителей, наоборот, не заменено ни одной. Пусть, например, это c^k. Тогда Брейн может, например, подставить вместо c значение выражения $a^n b^m$, а вместо k подставить двойку — и все произведение будет равно кубу числа $a^n b^m$.

5. (8–11) На доске начерчен выпуклый четырёхугольник. Алёша утверждает, что его можно разрезать диагональю на два остроугольных треугольника. Боря — что можно на два прямоугольных, а Вася — что на два тупоугольных.

Оказалось, что ровно один из троих неправ. Про кого можно наверняка утверждать, что он прав?

Ответ. Про Васю.

Решение. Наш четырехугольник не может быть прямоугольником, так как тогда прав только один человек, Боря.

Значит, этот четырехоугольник имеет тупой угол (действительно, если каждый угол четырехугольника не превосходит $90°$, то сумма углов не превосходит $360°$; но сумма углов выпуклого четырехугольника равна $360°$). Поэтому при одном из разрезаний получается тупоугольный треугольник — то есть, если правы два человека, то Вася заведомо прав.

Остается еще привести примеры, в которых неправ только Алёша (подойдет, например, трапеция с диагональю, перпендикулярной основаниям) и только Боря (подойдет, например, ромб).

▷ Можно решить задачу и отталкиваясь от вопроса о том, как четырехугольник может разрезаться на два прямоугольных треугольника. Например, следующим образом.

Второе решение. Если Вася неправ, то правы Алёша и Боря. Тогда четырехугольник режется на два прямоугольных треугольника.

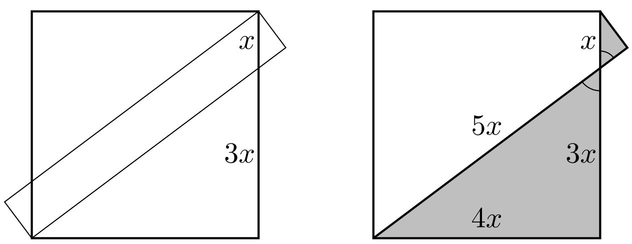
I. Если прямые углы обоих бориных треугольников являются углами четырехугольника, то сумма оставшихся двух углов четырехугольника равна $180°$. Значит, оба этих угла не могут быть острыми. Поэтому при разрезании по другой диагонали не может получиться два остроугольных треугольника — противоречие.

II. Если же прямой угол какого-то из бориных треугольников примыкает к диагонали, то этот угол является частью тупого угла четырехугольника. Значит, при разрезании по другой диагонали получится тупоугольный треугольник — снова противоречие.

▷ Имеются и другие решения. Например, можно отталкиваться, наоборот, от разрезания на два остроугольных треугольника.

6. (10–11) Прямоугольник площади 14 делит сторону квадрата в отношении 1 к 3 (см. рис). Найдите площадь квадрата.

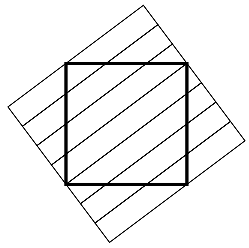
Ответ. 50.



Решение. Два серых треугольника подобны (по трем углам). При этом гипотенуза меньшего из них равна x, а гипотенуза большего есть $\sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x$ — т. е. их стороны относятся как $1:5$. Значит, катеты меньшего треугольника равны $\frac{3}{5}x$ и $\frac{4}{5}x$.

Поэтому площадь прямоугольника есть $(5 + \frac{3}{5})x \cdot \frac{4}{5}x = \frac{28\cdot 4}{25}x^2$. С другой стороны, она равна 14. Значит, $x^2 = {}^{25}/_{8}$, а искомая площадь есть

$$(4x)^2 = 16x^2 = 16 \cdot {}^{25}/_{8} = 50.$$



Второе решение. Продлим короткие стороны прямоугольника. После чего разделим обе боковые стороны квадрата на 4 равные части и проведем прямые, параллельные длинной стороне прямоугольника.

Четыре пристроенных к квадрату прямоугольных треугольника равны по гипотенузе и двум углам (и отсюда видно, что это египетские треугольники: отношения катетов у них $3:4$). Таким образом, 7 прямоугольников составляют квадрат. Его площадь есть $7\cdot 14 = 98$, откуда сторона квадрата есть $7\sqrt{2}$, а маленькая сторона прямоугольника — $\sqrt{2}$.

Теперь нетрудно вычислить искомую площадь маленького квадрата как разность площади большого квадрата и площади достроенных треугольников:

$$7\cdot 14 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = 98 - 48 = 50.$$

7. (10–11) Целые числа m и n таковы, что сумма $\sqrt{n}+\sqrt[3]{m}$ целая. Верно ли, что оба слагаемых целые?

Ответ. Да.

Решение. Пусть $\sqrt{n}+\sqrt[3]{m}=k$, т. е. $\sqrt[3]{m}=k-\sqrt{n}$. Возведем обе части в куб:

$$m = k^3 - 3k^2\sqrt{n} + 3kn - n\sqrt{n},$$

то есть

$$k^3 + 3kn - m = (3k^2+n)\sqrt{n}.$$

Так как $3k^2+n>0$, последнее равенство равносильно тому, что

$$\sqrt{n} = \frac{k^3+3kn-m}{3k^2+n}$$

Таким образом, $\sqrt{n}$ — число рациональное.

Но если $\sqrt{n}$ — число рациональное, то это число целое[1]. Но тогда и число $\sqrt[3]{m} = k-\sqrt{n}$ целое.

▷ Утверждение задачи допускает различные обобщения. Пусть, например, числа a_i рациональные, n_i натуральные, а p_i простые. Тогда если сумма

$$a_1\sqrt[p_1]{n_1}+\dots+a_k\sqrt[p_k]{n_k}$$

целая, то и каждое слагаемое целое. (Это утверждение можно доказать в духе приведенного выше решения — правда, пригодятся еще индукция и бином Ньютона.)

---

[1] Действительно, пусть $\sqrt{n} = p/q$ — несократимая дробь со знаменателем, не равным единице. Но тогда и $n = p^2/q^2$ — несократимая дробь со знаменателем, не равным единице (при желании, этот факт нетрудно доказать, пользуясь основной теоремой арифметики).

Не стоит, впрочем, полагать, что между корнями невозможны никакие нетривиальные соотношения. Можно проверить, например, что $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{2} = 1$, а $\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{7}}$.

▷ Вариант подготовили: Т. И. Голенищева–Кутузова, Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, Г. А. Мерзон, И. В. Раскина, Б. Р. Френкин, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко

- ▷ По результатам проверки каждого задания ставилась одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«+» — задача решена полностью;
«±» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения;
«∓» — задача не решена, но имеются содержательные продвижения;
«−» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставился «0».
- ▷ Так как по одному ответу — особенно когда это ответ типа «да/нет» — невозможно определить, в какой степени участник решил задачу, за верный ответ без решения ставится оценка «−». (Естественно, это не относится к задаче 2, в которой по условию требовалось лишь привести пример.)

Комментарии по задачам

1. Отметим, что в этой задаче полезной является (считается) только мякоть. За решения, содержашие утверждения типа «цена косточки у первого продавца — $150 \cdot {}^1\!/_3 = 50$ рублей» или «у первого продавца мякоть стоит $150 \cdot {}^2\!/_3 = 100$ рублей», ставилась оценка «−».

2. В случае, если условие было понято неверно (и либо было нарисовано что-то отличное от замкнутой несамопересекающейся ломаной, либо тигр находился снаружи замкнутой несамопересекающейся ломаной[2]), ставилась оценка «−».

3. За решения, в которых предлагалось что-то делать до того, как зелье закипит (что прямо противоречит условию), ставилась оценка «−».

За решения, в которых предполагалось, что “неизвестная часть” равна чему-то конкретному (например, «пусть неизвестная часть — это половина») ставилась та же оценка.

4. Если оба основных случая (I и II в решении выше) рассматриваются, но какой-то из мелких подслучаев упущен, ставилась оценка «±». Если же из этих случаев рассматривался только один (например, считалось, что в каждой из степеней заменена одна буква), ставилась оценка не выше «∓».

5. Для получения оценки «+» необходимо было:
— во-первых, доказать, что всегда прав Вася,
— во-вторых, привести примеры, показывающие, что утверждать этого ни про Алёшу, ни про Борю нельзя.
За решение только первой части ставилась оценка «±», за решение только второй части ставилась оценка «∓».

При доказательстве первой части важную роль играет грамотная организация перебора[3]. В случае, когда бессистемный перебор (перебор, в котором не виден принцип,

[2] То есть мог уйти, не пересекая ломаную.

[3] Например, в первом решении перебора вообще удается избежать.

по которому упорядочены случаи) оказывался (ожидаемо) неполон, ставилась оценка не выше «$\mp$» («$-$», если рассматривалось только несколько конкретных четырехугольников).

6. Первая, геометрическая, часть решения — убедиться в подобии маленького и большого треугольников. За верное решение только этой части ставилась оценка «$\mp$».

Если же подобие написано неверно (перепутаны местами катеты), ставилась оценка не выше «$\mp$».

Вторая, алгебраическая, часть решения — сначала получить линейное уравнение на x^2, а потом найти из него площадь. Если линейное уравнение на x^2 было составлено верно, но дальше допущена арифметическая ошибка, ставилась оценка «$\pm$».

7. Жюри обращает внимание участников на то, что утверждение «если сумма двух чисел целая, то каждое из них рационально» неверно (контрпример доставляют числа $\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$), за его использование ставилась оценка «$-$».

Неверно и утверждение «если ab и a — целые числа, то b — тоже целое число».

Утверждением «корень из целого числа — число либо целое, либо иррациональное» можно было — если оно в явном виде сформулировано — пользоваться без доказательства.