XXXVII Турнир имени М. В. Ломоносова 28 сентября 2014 года

Конкурс по математике. Ответы и решения

(предварительная версия от 13.10.2014)

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

1. (6–7) Когда в Братске полдень — в Гусеве 6 часов утра, а в Комсомольске-на-Амуре 14 часов. А когда в Златоусте полдень — в Елизово 18 часов, а в Гусеве 9 часов утра. Который час в Комсомольске-на-Амуре, когда в Елизово полдень?

Ответ. 11 часов утра.

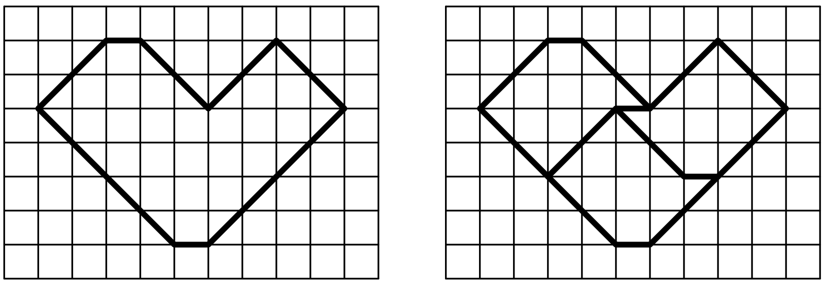
Первое решение. Когда в Елизово полдень, в Гусеве (из второго условия) 3 часа. А когда в Гусеве 3 часа, в Комсомольске-на-Амуре (из первого условия) 11 часов.

Второе решение. Запишем условие задачи в виде таблицы, в каждом столбце которой указано, сколько времени в один и тот же момент в разных городах.

Братск	12		
Гусев	**6**	**9**	
Комсомольск	14	?	**?**
Златоуст		12	
Елизово		**18**	**12**

Видно, что второй столбец соответствует моменту на 3 часа позже первого, а третий — на 6 часов раньше второго. Поэтому первый знак вопроса надо заменить на «17», а второй — на «11».

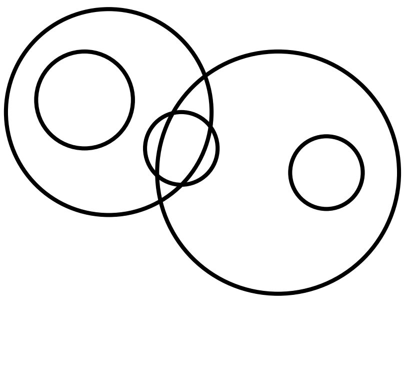
2. (6–7) Разрежьте фигуру на рисунке на три одинаковые части.



Ответ. См. правый рисунок.

Комментарий. Жюри не известно других разрезаний этой фигуры на три равные.

3. (6–8) Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?



Ответ. Нет.

Решение. Допустим, что лесник прав. Посмотрим на левый и правый маленькие круги. В каждом из них лесник насчитал по 3 сосны. Значит, других сосен в больших кругах не должно быть. Но тогда в маленьком центральном круге не должно быть вообще ни одной сосны.

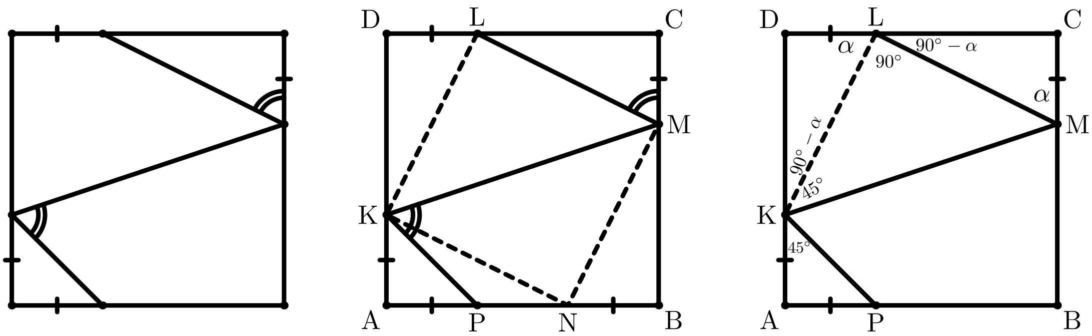
4. (8–9) Существует ли число, которое делится ровно на 50 чисел из набора $1, 2, \ldots, 100$?

Ответ. Да, существует.

Решение. Подойдет, например, произведение всех *нечётных* чисел от 1 до 99. (Действительно, на все нечётные числа от 1 до 100 это произведение делится — и их как раз 50, — а ни на одно чётное не делится, так как не делится даже на 2.)

Комментарий. Есть и много других чисел с таким свойством.

5. (8–9) На сторонах квадрата отложили 4 равных отрезка (как на рисунке слева). Докажите, что два отмеченных угла равны.



Первое решение. Отложим на стороне AB отрезок BN, равный AP. Заметим, что $KLMN$ — квадрат, а угол CML равен углу AKN. (Это следует из того, что прямоугольные треугольники AKN, CML, BNM и DLK равны по двум катетам. Или можно сказать по-другому: из того, что картинка переходит в себя при повороте большого квадрата на $90°$.)

Осталось доказать, что углы AKN и MKP равны. Но, действительно, $\angle AKN = \angle NKP + \angle AKP = \angle NKP + 45°$, а $\angle MKP = \angle NKP + \angle MKN = \angle NKP + 45°$ (угол MKN равен $45°$, так как треугольник MKN равнобедренный прямоугольный).

Второе решение. Пусть $\angle CML = \alpha$. Прямоугольные треугольники DLK и CML равны по двум катетам. Поэтому $\angle DKL = 90° - \alpha$, а $\angle KLM = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$.

Из последнего видно, что треугольник KLM — равнобедренный прямоугольный. Значит, $\angle LKM = 45°$. Угол AKP тоже равен $45°$ как угол равнобедренного прямоугольного треугольника. Поэтому $\angle PKM = 180° - 45° - 45° - (90° - \alpha) = \alpha$.

6. (7–11) На дереве сидело 100 попугайчиков трёх видов: зелёные, жёлтые, пёстрые.

Пролетая мимо, Ворона каркнула: «Среди вас зелёных больше, чем пёстрых!». «Да!» — согласилось 50 попугайчиков, а остальные прокричали «Нет!».

Обрадовавшись завязавшемуся диалогу, Ворона снова каркнула: «Среди вас пёстрых больше, чем жёлтых!». Опять половина попугайчиков закричали «Да!», а остальные — «Нет!».

Зелёные попугайчики оба раза сказали правду, жёлтые — оба раза солгали, а каждый из пёстрых один раз солгал, а один раз сказал правду. Могло ли жёлтых попугайчиков быть больше, чем зелёных?

Ответ. Нет, не могло.

Первое решение. Обозначим через П_1 количество пёстрых попугайчиков, которые сначала солгали, а потом сказали правду, а через П_2 число остальных пёстрых. Про каждое утверждение солгали и сказали правду одинаковое число попугайчиков, т. е. $\text{Ж}+\text{П}_1 = \text{З}+\text{П}_2$, $\text{Ж}+\text{П}_2 = \text{З}+\text{П}_1$. Значит, $\text{Ж} = \text{З}$ (сложим два уравнения и сократим лишнее).

Второе решение. Можно изложить то же решение и не вводя переменные.

Оба раз правду сказали по 50 попугайчиков — все зеленые и некоторые пестрые. Поэтому в первый раз правду сказали столько же пестрых, сколько и во второй.

Значит, в первый раз сказавших правду и солгавших пестрых было поровну. А поскольку правду и ложь в первый раз сказало одинаковое количество попугайчиков, желтых и зеленых попугаев было поровну.

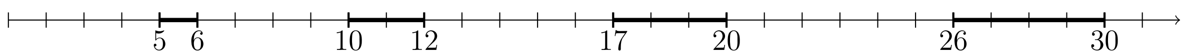
Комментарий. Решение не использует то, какие именно вопросы задавала Ворона, важно только, что оба раза «да» и «нет» отвечало поровну попугайчиков.

7. (10–11) Имеется бесконечная арифметическая прогрессия натуральных чисел с ненулевой разностью. Из каждого её члена извлекли квадратный корень и, если получилось нецелое число, округлили до ближайшего целого. Может ли быть, что все округления были в одну сторону?

Ответ. Нет.

Решение. Разберемся сначала, когда число $\sqrt{a}$ округляется в меньшую сторону, а когда в большую. Число $\sqrt{a}$ округляется в меньшую сторону до числа n, когда $n < \sqrt{a} < n + 1/2$, то есть когда $n^2 < a < n^2 + n + 1/4$.

Таким образом, корень из натурального числа a округляется вниз, если a попадает на какой-то отрезок вида $[n^2+1; n^2+n]$ (на рис. показаны такие отрезки для $n = 2, 3, 4, 5$).



Теперь можно понять, почему хотя бы одно число будет округлено вниз. Действительно, длина отрезка $[n^2+1, n^2+n]$ все время растет (она равна $n-1$) и начиная с какого-то n становится больше разности нашей прогрессии. Значит, какой-то ее член на этот отрезок точно попадет («делая шаги длиной 1 м лужу длиной 10 м не перешагнуть»). Аналогично доказывается, что хотя бы одно число будет округлено вверх.

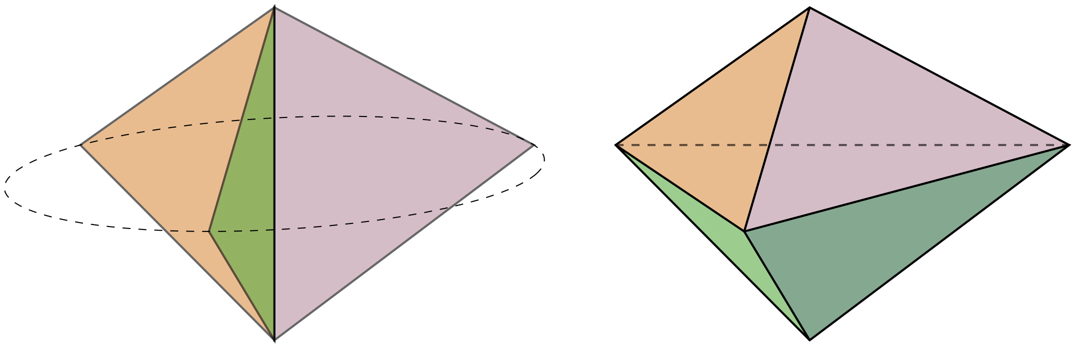
8. (10–11) Правильный тетраэдр обладает таким свойством: для любых двух вершин найдётся третья вершина, образующая с этими двумя правильный треугольник. Существуют ли другие многогранники, обладающие этим свойством?

Ответ. Да, существуют.

Решение. Зафиксируем две точки, A и B. Множеством точек X таких, что треугольник ABX равносторонний, является окружность. Возьмем на этой окружности точки C, D, E такие, чтобы треугольник CDE был равносторонним. Многогранник с вершинами

A, B, C, D, E обладает требуемым свойством. Действительно, каждая пара его вершин входит в один из равносторонних треугольников ABC, ABD, ABE и CDE.

(Получающийся многогранник по-другому можно описать как две правильные треугольные пирамиды с высотой, равной половине боковой стороны, склееные по основанию.)



Комментарий. Можно построить и другой (невыпуклый) многогранник с тем же набором вершин. Существуют ли еще многогранники с таким свойством, жюри не известно.

Вариант подготовили: А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Т. И. Голенищева-Кутузова, С. А. Дориченко, Т. В. Казицына, Г. А. Мерзон, М. А. Раскин, Б. Р. Френкин, И. В. Ященко.